

問 B.5.8

(c) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

- (1) (a, b) , $|a|$, $|b|$, $a \times b$ を計算せよ。
- (2) 点 P を通り a , b の両方と平行な平面の媒介変数表示を求めよ。
- (3) (2) の平面の媒介変数を用いない方程式を求めよ。
- (4) 点 P を通り a , b の両方と垂直な直線の媒介変数表示を求めよ。

(1) $(a, b) = 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 5$
 $= 51$

$|a| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{66}$

$|b| = \sqrt{8^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{93}$

$a \times b = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 - 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 8 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 51 \\ -30 \end{pmatrix}$

(2) 求める平面上の任意の点 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、求める平面は 2 つの媒介変数 $s, t \in \mathbb{R}$ を用いて $x = p + s a + t b$ と表される。

よって、求める平面の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 6 + s + 8t \dots [1] \\ y = 9 + 4s + 2t \dots [2] \\ z = 3 + 7s + 5t \dots [3] \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \text{ である.}$$

(3) $[1] \times (-4) + [2]$ より $-4x + y = -24 + 9 - 32t + 2t$

$t = \frac{4x - y - 15}{30}$

$[1] \times (-7) + [3]$ より $-7x + z = -42 - 56t + 3 + 5t$

$t = \frac{7x - z - 39}{51}$

$\frac{4x - y - 15}{30} = \frac{7x - z - 39}{51}$

$\frac{4x - y - 15}{10} = \frac{7x - z - 39}{17}$

$(5, 17) - (0, 39)$

$17(4x - y - 15) = 10(7x - z - 39) = 3(5 \cdot 17 - 13 \cdot 10)$

$68x - 17y - 15 \cdot 17 = 70x - 10z - 10 \cdot 39 = 3 \cdot 5 \cdot (17 - 2 \cdot 13)$

$2x + 17y - 10z - 10 \cdot 39 + 15 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot (-9)$

(4) $2x + 17y - 10z - 135 = 0$

$(a \times b, b) = 6 \cdot 8 + 51 \cdot 2 - 30 \cdot 5$

$= 48 + 102 - 150$

$= 0$

$(a, a \times b) = 1 \cdot 6 + 4 \cdot 51 + 7 \cdot (-30)$

$= 6 + 204 - 210 = 0$

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0$ ゆえに $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と垂直なベクトルである。

このことと、点 P を通るという条件より、求める直線上の任意の点を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、求める直線は媒介変数 $u \in \mathbb{R}$ を用いて $\mathbf{x} = \mathbf{P} + u(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ と表される。

よって、求める直線の媒介変数表示は、

$$\begin{cases} x = 6 + 6u \\ y = 9 + 51u \\ z = 3 - 30u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}) \quad \text{である。}$$