

C 1.1

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax^2 + by^2 + cx + dy \\ &= a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 - \frac{c^2}{4a} - \frac{d^2}{4b} \end{aligned}$$

(1) $f(x, y)$ が (x_1, y_1) で最大値を取ると仮定する

$$\begin{aligned} &f(x, y) - f(x_1, y_1) \\ &= a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 - a\left(x_1 + \frac{c}{2a}\right)^2 \\ &= a(x - x_1)\left(x + x_1 + \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

ここで $\alpha := |x_1| + |x_1 + \frac{c}{a}| + 1$ とし $f(x, y) - f(x_1, y_1)$ に代入すると.

$$\begin{aligned} &f(x, y) - f(x_1, y_1) \\ &= a(x_1 - x_1 + |x_1 + \frac{c}{a}| + 1)(|x_1 + \frac{c}{a}| + x_1 + \frac{c}{a} + |x_1| + 1) \end{aligned}$$

$$|x_1| - x_1 \geq 0, \quad |x_1 + \frac{c}{a}| + x_1 + \frac{c}{a} \geq 0 \text{ より}$$

$f(x, y) - f(x_1, y_1) > 0$ となるが、 (x_1, y_1) は $f(x, y)$ が最大値を取る時の点、として

取ったので常に $f(x, y) - f(x_1, y_1) \leq 0$ となるはずなのに矛盾.

よって $f(x, y)$ に最大値は存在しない

(2) $a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 \geq 0$ よりこの最小値は $x = -\frac{c}{2a}$ のとき 0

$b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 \geq 0$ よりこの最小値は $y = -\frac{d}{2b}$ のとき 0

よってこれら2つの和の最小値も0である.

$(-\frac{c^2}{4a} - \frac{d^2}{4b})$ は定数であるから $f(x, y)$ は $x = -\frac{c}{2a}, y = -\frac{d}{2b}$ のとき最小値を持ち
その値は $-\frac{c^2}{4a} - \frac{d^2}{4b} (=:\beta)$ である.

(3) $Z = f(x, y)$ とし $Z = \alpha$ を考える.

$\alpha = a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 - \frac{c^2}{4a} - \frac{d^2}{4b}$ を変形して

$$\frac{\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2}{\frac{\alpha}{a} + \frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4ab}} + \frac{\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2}{\frac{\alpha}{b} + \frac{c^2}{4ab} + \frac{d^2}{4b}} = 1 \quad (*)$$

$f(x, y)$ の等高系は $\begin{cases} (*) \text{ が表す楕円} & (\alpha > \beta) \\ \text{一点 } (-\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2b}) & (\alpha = \beta) \\ \emptyset & (\alpha < \beta) \end{cases}$