

AHA23035

勝浦 大智

$$(1) f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \\ = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}y^2$$

$f(x, y)$ が最大値 K をもつと仮定する。

このとき、 $f(1, 0) = a > 0$ となる。

$K \geq a > 0$ より、 $K > 0$ である。

また、 $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ となるので、 $-\frac{4a}{b^2 - 4ac}K > 0$ となる。

$$1 - \frac{b}{2a} \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K \in \mathbb{R}$$

$$f\left(1 - \frac{b}{2a} \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K, \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K\right) = a\left(1 - \frac{b}{2a} \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K + \frac{b}{2a} \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \left(\sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K\right)^2$$

$$= a\left(1 - \frac{b}{2a} \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K + \frac{b}{2a} \sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \left(\sqrt{-\frac{4a}{b^2 - 4ac}}K\right)^2$$

$$= a + K > K$$

これは、 $f(x, y)$ の最大値が K であることに反する。

従って最大値を持たない。

$$(2) f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}y^2$$

$$a > 0, x + \frac{b}{2a}y \in \mathbb{R} \text{ より } a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 \geq 0$$

$$a > 0, b^2 - 4ac < 0, y \in \mathbb{R} \text{ より } -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0$$

従って $f(x, y) \geq 0$

また、 $(x, y) = (0, 0)$ のとき $f(0, 0) = 0$

よって最小値 0 をもつ