

C.1.4

a, b, c は実数で、 $a > 0, b^2 - 4ac > 0$ とする。2変数関数 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ について、次の各問に、微分を用いずに答えよ。

(1) $f(x, y)$ は最大値を持たないことを示せ。(2) $f(x, y)$ は最小値を持たないことを示せ。

(1) $f(0, 0) = 0$ より最大値が存在するなら 0 以上、 $f(x, y) \leq M$ なる最大値 $M \geq 0$ が存在すると

仮定する。 $a > 0$ なので $x' > \sqrt{\frac{M}{a}}$ なる x' をとると $f(x', 0) = ax'^2 > M$ となるがこれは仮定に

矛盾する。

(2) $f(0, 0) = 0$ より最小値が存在するなら 0 以下、 $f(x, y) \geq -m$ なる最小値 $-m \leq 0$ が存在すると

と仮定する。条件 $a > 0, b^2 - 4ac > 0$ より $c - \frac{b^2}{4a} < 0$ なので $y' > \sqrt{\frac{m}{\frac{b^2}{4a} - c}}$ なる y' をとると

$$f(x, y) = a\left(x - \frac{by}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2 \text{ である事から } f\left(\frac{by'}{2a}, y'\right) = \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y'^2 > \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\left(\sqrt{\frac{m}{\frac{b^2}{4a} - c}}\right)^2 = -m$$

となるがこれは仮定に矛盾する。