


問C.1.5 a, b, c, d は実数で、 $a > 0, b^2 - 4ac = 0$ とする。2変数関数 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dy$ について、次の各問に、微分を用いずに答えよ。

(1) $f(x, y)$ は最大値を持たないことを示せ。

(2) $f(x, y)$ は最小値を持つための条件を求めよ。

(3) $f(x, y)$ が最小値を持つとき、 $z = f(x, y)$ のグラフの等高線は何か答えよ。

$$(1) f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dy$$

∵ $a > 0$ ∴ $x \rightarrow \infty$ のとき

$$f(x, 1) = ax^2 + bx + c + d \rightarrow \infty$$

∴ f は Max をもたない。

$$\begin{aligned} (2) f(x, y) &= a\left(x + \frac{by}{2a}\right)^2 - \frac{b^2y^2}{4a} + cy^2 + dy \\ &= a\left(x + \frac{by}{2a}\right)^2 - \frac{y^2}{4a}(b^2 - 4ac) + dy \\ &= a\left(x + \frac{by}{2a}\right)^2 + dy \end{aligned}$$

$$d = 0 \Rightarrow f(x, y) = a\left(x + \frac{by}{2a}\right)^2 \geq 0$$

∴ $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ のとき

Min = 0 となる。

$$d \neq 0 \Rightarrow f(x, y) = a(x + \frac{by}{2a})^2 + dy.$$

$$\text{よって } x = -\frac{by}{2a} \text{ となる。}$$

$$d > 0 \text{ ならば } y \rightarrow -\infty \text{ ならば } f(x, y) = dy \rightarrow -\infty$$

$$d < 0 \text{ ならば } y \rightarrow \infty \text{ ならば } f(x, y) = dy \rightarrow -\infty$$

よって Min を もたない。

(3) f が Min を もつとき、 $d = 0$ である。

$$\text{よって } f(x, y) = a(x + \frac{by}{2a})^2$$

$$\text{よって } z = f(x, y) = a(x + \frac{by}{2a})^2$$

の等高線は。

$$\left\{ \begin{array}{l} z < 0 \text{ ならば、ない。} \end{array} \right.$$

$$z = 0 \text{ ならば、 } x + \frac{by}{2a} = 0 \text{ より 一本の直線 } x = -\frac{by}{2a}$$

$$z > 0 \text{ ならば、 } \pm \sqrt{\frac{z}{a}} = x + \frac{by}{2a} \text{ より、}$$

$$\text{二本の直線 } x = -\frac{by}{2a} + \sqrt{\frac{z}{a}}, x = -\frac{by}{2a} - \sqrt{\frac{z}{a}}$$