

数学基礎演習 問 C.2.4(b)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 6xy + y^2 \\ &= (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、A の固有多項式 $g_A(t)$ は、

$$\begin{aligned} g_A(t) &= |tE - A| \\ &= \begin{vmatrix} t-1 & 3 \\ 3 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t+2)(t-4) \end{aligned}$$

となるので、A の固有値は $\lambda = -2, 4$

$\lambda = -2$ とする。

$(-2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間が A の固有値 -2 の固有空間 $W(-2; A)$ である。このとき $-2E - A$ を簡約化すると

$$-2E - A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(-2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は、 $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\text{従って、} W(-2; A) = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4$ とする。

$(4E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間が A の固有値 4 の固有空間 $W(4; A)$ である。このとき $4E - A$ を簡約化すると

$$4E - A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(4E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は、 $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\text{従って、} W(4; A) = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって、 $\dim(W(-2; A)) + \dim(W(4; A)) = 1 + 1 = 2$ となるので、 A は対角化可能である。

$W(-2; A)$ の基 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を正規化すると $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。

また、 $W(4; A)$ の基 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を正規化すると $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。

$W(-2; A)$ の各ベクトルと $W(4; A)$ の各ベクトルは直交するので、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基である。

よって、この $\mathbb{R}^2$ の正規直交基を列ベクトルに持つ行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

とおくと、 P は直交行列で、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

P は直交行列なので、 $P^{-1} = {}^tP$ であり、 ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ が成り立つ。

よって、 $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

と直交変数変換すると

$$\begin{aligned} f(x, y) &= {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} \\ &= {}^t(P\mathbf{x}')A(P\mathbf{x}') \\ &= {}^t\mathbf{x}'({}^tPAP)\mathbf{x}' \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= -2x'^2 + 4y'^2 \end{aligned}$$

と表される。二次関数 $z = f(x', y') = -2x'^2 + 4y'^2$ のグラフの曲面は双曲放物面である。

直交変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ に現れる 2×2 直交行列 P について $\det P = 1$ が成り立つので、この座標変換は回転による変換であり、元の二次関数 $z=f(x, y)$ のグラフの曲面は双曲放物面である。□