

次の関数の極限を求めよ。有限な極限が存在する場合はその値を、正(負)の無限大に発散する場合は $+\infty$ ($-\infty$) と解答し、それ以外の場合は「存在しない」と解答せよ。

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

解答

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と 2 次極座標 に 表示 すると

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ より、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ であることと $r \rightarrow 0$ であることは 同値 である。

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{(r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{r^2} (\cos^2 \theta) r^2 \sin^2 \theta}{\cancel{r^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \right|$$

$$= |r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta| \dots \textcircled{\star}$$

$$0 \leq |\sin \theta| \leq 1, \quad 0 \leq |\cos \theta| \leq 1 \text{ かつ } \theta \text{ の } \forall$$

$$0 \leq |r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta| \leq r^2$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0 \quad (\text{さきほどの原理より}) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0$$

$$\textcircled{\star} \text{ より } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

□