

C.2.5(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

$(x,y) = (0,0)$ のとき $\frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ は定義されない $(x,y) \neq (0,0)$ とする。

x, y を極座標で

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi) \text{ とおく。}$$

$(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0$ とある。

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \frac{r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta}{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{r^3 \cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

よって、

$$0 \leq \left| \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{r^3 \cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \right| \leq \left| \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} \right| = |r \cos \theta| \leq r$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} r = 0$$

よって、この原理より $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \left| \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{r^3 \cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \right| = 0$

したがって、 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{r^3 \cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$ の極限は存在しその値は 0 。