

問 C.2.5.(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ の極限を求めよ。有限な極限が存在する場合はその値を、正(負)

の無限大に発散する場合は、 $+\infty(-\infty)$ と解答し、それ以外の場合は「存在しない」と解答せよ。

[解] $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ とする。

原点(0,0)を通る曲線 $\ell: y = mx^3$ に沿って、 (x,y) を(0,0)に近づける。

$$y \neq 0 \text{ のとき } f(x, mx^3) = \frac{mx^6}{x^6(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

$y \rightarrow 0$ のとき $f(x, mx^3)$ は $\frac{m}{1+m^2}$ に収束する。しかし、 $\frac{m}{1+m^2}$ は m に依存している。

実際、 $m=1$ のとき $\frac{m}{1+m^2} = \frac{1}{2}$ であるが、 $m=-1$ のとき $\frac{m}{1+m^2} = -\frac{1}{2}$ である。

したがって、 (x,y) を(0,0)に近づけたとき、関数 $f(x,y)$ が近づく値は

(x,y) の(0,0)への近づけ方に依存する。

以上から関数 $f(x,y)$ は $(x,y) \rightarrow (0,0)$ で極限は存在しない。