No

Date

C.3.1　　AHA23057　石川由展

$f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ とすると偏微分は次のようになる

$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x\right\} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y\right\} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{0 \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot 2y\right\} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

ここで

$\Delta f = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$ となるため

$f(x,y)$ は調和関数である

次に $g(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ とすると偏微分は次のようになる

$g_x(x,y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $g_y(x,y) = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$g_{xx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{0 \cdot (x^2+y^2) + y \cdot 2x\right\} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$g_{yy}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{0 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2y\right\} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{-1(x^2+y^2) + y \cdot 2y\right\} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

ここで

$\Delta g = g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$ となるため

$g(x,y)$ は調和関数である