

数学基礎演習2 演習問題

問 C.3.2 (b)

$f(x, y) = x^4 + ax^3y + bx^2y^2 + cxy^3 + ay^4$ を偏微分すると

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 3ax^2y + 2bx y^2 + cy^3$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 6axy + 2by^2$$

$$f_y(x, y) = ax^3 + 2bx^2y + 3cxy^2 + 4ay^3$$

$$f_{yy}(x, y) = 2bx^2 + bcxy + 12ay^2$$

∴ $f(x, y)$ が調和関数となるのは、 $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ となるとき、

$$(12x^2 + 6axy + 2by^2) + (2bx^2 + bcxy + 12ay^2) = 0$$

$$\therefore (12 + 2b)x^2 + (6a + bc)xy + (2b + 12a)y^2 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 12 + 2b = 0 \\ 6a + bc = 0 \\ 2b + 12a = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = -1 \end{cases}$$

したがって、求める実数 a, b, c の値は、 $a = 1, b = -6, c = -1$ である