数学基礎演習 C3.2(d)

$f(x,y)=x^6+ax^4y^2+bx^2y^4+cy^6$

$fx(x,y)=6x^5+4ax^3y^2+2bxy^4$

$fxx(x,y)=30x^4+12ax^2y^2+2by^4$

$fy(x,y)=2ax^4y+4bx^2y^3+6cy^5$

$fyy(x,y)=2ax^4+12bx^2y^2+30cy^4$

ここで f(x,y)が調和関数となるのは

$fxx(x,y)+fyy(x,y)=0$ となるときで

$fxx(x,y)+fyy(x,y)=(30x^4+12ax^2y^2+2by^4)+(2ax^4+12bx^2y^2+30cy^4)=0$

すなわち$(30+2a)x^4+(a+b)12x^2y^2+(2b+30c)y^4=0$

$$\begin{cases} 30+2a=0 \\ a+b=0 \\ 2b+30c=0 \end{cases}$$

よって a=-15 , b=15 , c=-1