C.3.2(e)

<問題>

$f(x, y) = \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy)$ が調和関数となるような実数 a, b の値を求めよ。

<解答>

$f(x, y) = \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy)$ について、

$$f_x(x, y) = 2x \cos(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) + by \sin(x^2 + ay^2) \sinh(bxy)$$

$$f_{xx}(x, y) = (b^2 y^2 - 4x^2) \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) + 4bxy \cos(x^2 + ay^2) \sinh(bxy) + 2 \cos(x^2 + ay^2) \cosh(bxy)$$

$$f_y(x, y) = 2ay \cos(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) + bx \sin(x^2 + ay^2) \sinh(bxy)$$

$$f_{yy}(x, y) = (b^2 x^2 - 4a^2 y^2) \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) + 4abxy \cos(x^2 + ay^2) \sinh(bxy) + 2a \cos(x^2 + ay^2) \cosh(bxy)$$

このとき、 $f(x, y)$ が調和関数となるための条件は、

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) &= 0 \\ (b^2 x^2 - 4x^2 + b^2 y^2 - 4a^2 y^2) \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) + (4ab + 4b) xy \cos(x^2 + ay^2) \sinh(bxy) \\ &\quad + (2a + 2) \cos(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) = 0 \\ (b^2 - 4) x^2 \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) + (b^2 - 4a^2) y^2 \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) + 4b(a+1) xy \cos(x^2 + ay^2) \sinh(bxy) \\ &\quad + 2(a+1) \cos(x^2 + ay^2) \cosh(bxy) = 0 \dots (i) \end{aligned}$$

ここで、(i) の x, y に具体的な値を代入する。

$[(x, y) = (\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0)]$ 第 2 項、第 3 項、第 4 項の値は 0 となるから、第 1 項について、

$$\begin{aligned} (b^2 - 4) \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cosh 0 &= 0 \\ \frac{\pi}{2} (b^2 - 4) &= 0 \\ b^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$[(x, y) = (0, \sqrt{\frac{\pi}{2a}}) (a \neq 0)]$ 第 1 項、第 3 項、第 4 項の値は 0 となるから、第 2 項について、

$$\begin{aligned} (b^2 - 4a^2) \cdot \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi}{2} \cosh 0 &= 0 \\ \frac{\pi}{2a} (b^2 - 4a^2) &= 0 \\ b^2 - 4a^2 &= 0 \end{aligned}$$

$[(x, y) = (0, 0)]$ 第 1 項、第 2 項、第 3 項の値は 0 となるから、第 4 項について、

$$\begin{aligned} 2(a+1) \cos 0 \cosh 0 &= 0 \\ 2(a+1) &= 0 \\ a+1 &= 0 \end{aligned}$$

よって、(i) の式が x, y の値に関わらず成り立つとき、 $\begin{cases} b^2 - 4 = 0 \\ b^2 - 4a^2 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases}$ ゆえに $(a, b) = (-1, \pm 2)$

これを (i) の式に代入すると、第 1 項、第 2 項、第 4 項の値は 0 となり、第 3 項についても $a+1=0$ より 0 となるから、(i) は x, y の値に関わらず成り立つ。

したがって、 $f(x, y) = \sin(x^2 + ay^2) \cosh(bxy)$ が調和関数となるような実数 a, b の値は

$$(a, b) = (-1, \pm 2)$$