

問題 C.3.3

$a, b$  は実数とする。関数  $f(x, y) = e^{ax} \sin by$  について、次の各問に答えよ。

- (1)  $f(x, y)$  を二回まで微分せよ。
- (2)  $f$  が調和関数となるための、 $a, b$  に関する必要十分条件を求めよ。

解答

(1)

$$f_x(x, y) = ae^{ax} \sin by$$

$$f_y(x, y) = be^{ax} \cos by$$

$$f_{xx}(x, y) = a^2 e^{ax} \sin by$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = abe^{ax} \cos by$$

$$f_{yy}(x, y) = -b^2 e^{ax} \sin by$$

(2)

(1) より、

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = a^2 e^{ax} \sin by - b^2 e^{ax} \sin by = (a^2 - b^2) e^{ax} \sin by = (a - b)(a + b) e^{ax} \sin by$$

$e^{ax} > 0$  より、これが  $x, y$  に関して恒等的に 0 になるための必要条件は、

$$a - b = 0 \text{ または } a + b = 0 \text{ または } \sin by \equiv 0$$

ここで、 $\sin by \equiv 0$  について

$b = 0$  のとき、 $\sin by \equiv 0$  が成り立つのは明らか。

また、 $b \neq 0$  のとき、 $\sin by \equiv 0$  が成り立つ  $b \in \mathbb{R}$  が存在すると仮定すると、全ての実数  $y$  に対して  $\sin by = 0$  が成り立つはずである。しかし、 $b = \frac{\pi}{2b} \in \mathbb{R}$  のとき、 $\sin by = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$  となり矛盾。

以上より、 $\sin by \equiv 0 \iff b = 0$  が成り立つ。

(i)  $a - b = 0$  すなわち、 $a = b$  のとき

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = a^2 e^{ax} \sin ay - a^2 e^{ax} \sin ay \equiv 0$$

で成立。

(ii)  $a + b = 0$  すなわち、 $a = -b$  のとき

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = (-b)^2 e^{-bx} \sin by - b^2 e^{-bx} \sin by \equiv 0$$

で成立。

(iii)  $b = 0$  のとき、 $f(x, y) = 0$  なので

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0 + 0 \equiv 0$$

で成立。

したがって、求める必要十分条件は

$$a = b \text{ または } a = -b \text{ または } b = 0$$

である。