数学基礎演習 2_C.3.5(b)

AHA23005　板倉 洸基

prop.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big)\\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases}$$

が原点で

[1]連続

[2]偏微分可能

[3]全ての方向に対して方向微分可能

[4]全微分可能

[5]C^1級

かどうかをそれぞれ判別せよ。

[1]連続

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\big(r>0,\theta\in[0,2\pi)\big)$$

とおくと、

$$|f(x,y)|=\left|\frac{(r^2\cos^2\theta)(r\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right|=|r\cos^2\theta\sin\theta|\leq r\to 0\ (r\to 0)$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ より、$f(x,y)$は$(0,0)$で連続である。

[3]方向微分

${}^\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\big((a,b)\neq(0,0)\big)$に対し、

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3a^2b}{t^2(a^2+b^2)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^2b}{a^2+b^2}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

よって、$f(x,y)$は$(0,0)$で全ての方向に対して方向微分可能である。

[2]偏微分

[3]において、$(a,b)=(1,0),(0,1)$としても、$f(x,y)$は$(0,0)$で方向微分可能であり、

これはそれぞれx偏微分、y偏微分であるから、$f(x,y)$は$(0,0)$で偏微分可能である。

[4]全微分

$f(x,y)$が$(0,0)$で全微分可能であるとき、

$f(h,k)-f(0,0)=f_x(0,0)h+f_y(0,0)+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$と書ける。

ここで、$f(0,0)=0$であり、

[3]で$(a,b)=(1,0),(0,1)$として、

$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$だから、

$f(h,k)=o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$となればよい。

よって$\dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\dfrac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$より、

$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}}=0$となればよい。

ここで、$(h,k)\to(0,0)$の極限について、

$k=mh(m\in\mathbb{R})$に沿って$h\to 0$で$(h,k)\to(0,0)$となるとき、

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{h^2(mh)}{(h^2+(mh)^2)^{3/2}}=\lim_{h\to 0}\frac{mh^3}{(1+m^2)^{3/2}h^3}=\lim_{h\to 0}\frac{m}{(1+m^2)^{3/2}}=\frac{m}{(1+m^2)^{3/2}}$より、

この極限はmの値に依存するから、極限値は存在しない。

よって、$f(x,y)$は$(0,0)$で全微分可能ではない。

[5]C^1級

$f(x,y)$がC^1級であれば、$f(x,y)$は全微分可能であるが、

[4]の結果より、$f(x,y)$は$(0,0)$で全微分可能でないから、

$f(x,y)$はC^1級でない。