問. 原点(0,0)においては0で定義される関数 $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ について原点(0,0)で

(1)連続性(2)偏微分可能性(3)方向微分可能性(4)全微分可能性(5) C^1 級であるか

を調べよ

(1) 任意の単位ベクトル $u = (u_1, u_2) \in R^2$ をとり、 $(x, y) = (su_1, su_2)$ ($s \in R$)とおく。

このとき、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は $s \rightarrow 0$ とみなせる。

$$|f(x, y)| = \left| \frac{(su_1)^3 + (su_2)^3}{(su_1)^2 + (su_2)^2} \right| = \left| \frac{s^3(u_1^3 + u_2^3)}{s^2} \right| = |s(u_1^3 + u_2^3)| \leq |s| \rightarrow 0 (s \rightarrow 0)$$

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ より、 $f(x, y)$ は(0,0)で連続

(2)(i) x についての偏微分可能性

$f(x, 0) (= x)$ の $x = 0$ での微分可能性を調べると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 1 \text{ より } f(x, 0) \text{ は } x = 0 \text{ で微分可能。}$$

よって、 $f(x, y)$ は原点で x について偏微分可能。

(ii) y についての偏微分可能性

$f(0, y) (= y)$ の $y = 0$ での微分可能性を調べると

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 1 \text{ より } f(0, k) \text{ は } y = 0 \text{ で微分可能。}$$

よって、 $f(x, y)$ は原点で y について偏微分可能。

(3)任意のベクトル $v = (v_1, v_2) \in R^2$ をとり、 $f(x, y)$ の原点における (v_1, v_2) 方向の方向微分可能性を調べる。

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tv_1)^3 + (tv_2)^3}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3(v_1^3 + v_2^3)}{t^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(v_1^3 + v_2^3)}{(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^3 + v_2^3}{v_1^2 + v_2^2}$$

より $f(x, y)$ は $(0,0)$ ですべての方向に対して方向微分可能

(4)原点での全微分可能性を調べるには

$$f(h, k) - f(0,0) = f_x(0,0)h + f_y(0,0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (h, k) \rightarrow (0,0) \text{ が成り立てばよい。}$$

また、 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1, f(0,0) = 0$ と $o(\sqrt{h^2 + k^2})$ の定義から

$$\frac{f(h,k) - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (h, k) \rightarrow (0,0) \text{ が成り立つか調べればよい。}$$

$$\frac{f(h,k) - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\frac{h^3 + k^3}{h^2 + k^2} - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^3 + k^3 - h^3 - k^3 - h^2k - hk^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-h^2k - hk^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (h, k) \rightarrow (0,0)$$

ここで $h = r \cos \theta, k = r \sin \theta (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおく。

このとき、 $(h, k) \rightarrow (0,0)$ は $r \rightarrow 0$ とできる。

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-h^2k - hk^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-(r^3 \cos^2 \theta \sin \theta + r^3 \cos \theta \sin^2 \theta)}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r^3 (\cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta)}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} (-\cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) = -(\cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

となり、この極限は θ の値に依存するので極限值は存在しない。

したがって $f(x, y)$ は $(0,0)$ で全微分可能でない。

(5) $f(x, y)$ が C^1 級であれば、 $f(x, y)$ は全微分可能であるが、(4)の結果より、 $f(x, y)$ は $(0,0)$ で全微分可

能でないから、 $f(x, y)$ は C^1 級でない。

としても良いが一応単体での証明も書く。

$f_x(x, y)$ の原点における連続性を調べる。

$(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ での $f(x, y)$ の偏微分係数 $f_x(x, y)$ を求めると

$$f_x(x, y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$f_x(0, 0) = 1$ から、極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = 1$ が成り立てば連続。

ここで $x = r' \cos \Phi, y = r' \sin \Phi (r' > 0, 0 \leq \Phi < 2\pi)$ とおく。

このとき、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は $r' \rightarrow 0$ とできる。

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} &= \lim_{r' \rightarrow 0} \frac{(r' \cos \Phi)^4 + 3r'^4 (\cos \Phi \sin \Phi)^2 - 2r'^4 \cos \Phi \sin^3 \Phi}{((r' \cos \Phi)^2 + (r' \sin \Phi)^2)^2} \\ &= \lim_{r' \rightarrow 0} \frac{r'^4 (\cos^4 \Phi + 3(\cos \Phi \sin \Phi)^2 - 2\cos \Phi \sin^3 \Phi)}{r'^4} \\ &= \lim_{r' \rightarrow 0} (\cos^4 \Phi + 3(\cos \Phi \sin \Phi)^2 - 2\cos \Phi \sin^3 \Phi) \\ &= \cos^4 \Phi + 3(\cos \Phi \sin \Phi)^2 - 2\cos \Phi \sin^3 \Phi \end{aligned}$$

よってこの極限は Φ の値に依存するので極限值は存在しない。

したがって $f_x(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続でない。

(なお、 $f_y(x, y)$ についても $f(x, y) = f(y, x)$ ゆえに同様に連続でないことが証明できる。)

故に $f(x, y)$ は C^1 級でない。