数学演習 2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　AHA23058　新屋翔斗

問 C.4.3(b)

$f(x,y)=x^3+12xy^2-12x$ とする。

偏導関数を求めると、

$$f_x(x,y)=3x^2+12y^2-12$$
$$f_y(x,y)=24xy$$

f が(a,b)で極値をもつとき、$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ をみたすので、連立二次方程式

$$\begin{cases} 3x^2+12y^2-12=0 & \cdots ① \\ 24xy=0 & \cdots ② \end{cases}$$

の解が、fが極値をとる点の候補の点である。

②より、$x=0$　または　$y=0$

$x=0$ のとき、①に代入して、yについて解くと、$y=\pm 1$

$y=0$ のとき、①に代入して、xについて解くと、$x=\pm 2$

よって、極値をとる点の候補点は、$(0,\pm 1),(\pm 2,0)$ の 4 点である。

ここで、$f(x, y)$ の 2 次偏導関数を求めると、

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$
$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 24y$$
$$f_{yy}(x, y) = 24x$$

これより、判別式 D を

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(x, y) &= f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 \\ &= 144x^2 - 144 \cdot 4y^2 \\ &= 144(x + 2y)(x - 2y) \end{aligned}$$

とすると、

$\mathrm{D}(0, \pm 1) = 144 \times (-4) < 0$ より、fは点$(0, \pm 1)$で鞍点をとり、

$\mathrm{D}(2,0) = 144 \times 4 > 0, f_{xx}(2,0) = 12 > 0$ より、fは点$(2,0)$で**極小値-16**をとり、

$\mathrm{D}(-2,0) = 144 \times 4 > 0, f_{xx}(-2,0) = -12 < 0$ より、fは点$(-2,0)$で**極大値16**をとる。

■