

C.4.3.

(c) $f(x, y) = 12x^2y + y^3 - 12y.$

$f_x(x, y) = 24xy$

$f_y(x, y) = 12x^2 + 3y^2 - 12$

f が点 (a, b) で極値をもつ条件は

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

よて

$$\begin{cases} 24ab = 0 \\ 12a^2 + 3b^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

• 解が極値の候補点である

$a = 0$ とすると $3b^2 = 12$

$b = \pm 2$

$b = 0$ とすると $12a^2 = 12$

$a = \pm 1$

したがって 候補点 $(a, b) = (0, \pm 2), (\pm 1, 0)$

$f_{xx}(x, y) = 24y$

$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 24x$

$f_{yy}(x, y) = 6y$

判別式 D は

$$\begin{aligned} D(x, y) &= 24y \cdot 6y - (24x)^2 \\ &= 144(y^2 - 4x^2) \end{aligned}$$

$f_{xx}(0, 2) = 48 > 0$

$f_{xx}(0, -2) = -48 < 0$

$f_{xx}(\pm 1, 0) = 6$

$D(0, \pm 2) = 144 \cdot 4 > 0$

$D(\pm 1, 0) = 144 \cdot (-4) < 0$

したがって $f_{xx}(0, 2) > 0$, $D(0, 2) > 0$ より f は点 $(0, 2)$ で極小値 -16

$f_{xx}(0, -2) < 0$, $D(0, -2) > 0$ より f は点 $(0, -2)$ で極大値 16 をとる

$D(\pm 1, 0) < 0$ より f は点 $(\pm 1, 0)$ で極値をとらない