

C4.3(d)

$4x^3 + 3xy^2 - 12x$ の極値を求めよ.

$f(x,y) = 4x^3 + 3xy^2 - 12x$ とする.

このとき、

$$f_x(x,y) = 12x^2 + 3y^2 - 12$$
$$f_y(x,y) = 6xy$$

f が極値をもつとき、 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$

を解く。したがって、

$$\begin{cases} 12x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases}$$

を解く。(x,y) が f が極値をとる候補の点である。

つまり、 $(x,y) = (0,\pm 2), (\pm 1, 0)$ の4点が極値をとる候補点である。

ここで、

$$f_{xx}(x,y) = 24x$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6y$$
$$f_{yy}(x,y) = 6x$$

であるので、判別式 D を、

$$D = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - \{f_{xy}(x,y)\}^2$$
 とおく。

点 $(0,2)$ において $D = -144 < 0$, $f_{xx}(0,2) = 0$

点 $(0,-2)$ において $D = -144 < 0$, $f_{xx}(0,-2) = 0$

点 $(1,0)$ において $D = 144 > 0$, $f_{xx}(1,0) = 24 > 0$

点 $(-1,0)$ において $D = 144 > 0$, $f_{xx}(-1,0) = -24 < 0$

より、 f は点 $(1,0)$ で極小値 -8

点 $(-1,0)$ で極大値 16 をとる。

点 $(0,\pm 2)$ で極値をとらない。

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする。

$$D = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2$$
 とおく。

$f_{xx}(a,b) > 0$ かつ $D > 0$ ならば $f(a,b)$ は極小値をとる

$f_{xx}(a,b) < 0$ かつ $D > 0$ ならば $f(a,b)$ は極大値をとる。
