

問 C.4.3(e)

$$f(x, y) = -x^4 + 4xy - 2y^2 \text{ とおく}$$

偏導関数を求めると

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4y, \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

f が点 (a, b) で極値をもつとすると $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ をみたす.

したがって連立方程式

$$\begin{cases} -4x^3 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \text{ の解が } f \text{ が極値をとる候補点である.}$$

この方程式を解くと $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1)$ (複号同順)

ここで $f(x, y)$ の2次偏導関数を求めると

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2, \quad f_{yy}(x, y) = -4, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4$$

判別式 D を

$$D = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = 48x^2 - 16 \text{ とおく.}$$

点 $(0, 0)$ において $D = -16 < 0$

点 $(\pm 1, \pm 1)$ において $D = 32 > 0, \quad f_{xx}(\pm 1, \pm 1) = -12 < 0$

以上より f は点 $(0, 0)$ において極値をとらない

点 $(\pm 1, \pm 1)$ において極大値 1 をとる