

C.4.3 (f) AHA23033 松村 和哉

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

このとき, $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y = 4(x^3 - y)$ 同様に $f_y(x, y) = 4(y^3 - x)$

よって, $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ のとき,
$$\begin{cases} x^3 - y = 0 & \text{--- ①} \\ y^3 - x = 0 & \text{--- ②} \end{cases} \quad \text{A \text{ 成り立} \rightarrow}$$

つまり, ①より, $y = x^3$ とあり, これを②に代入すると, $x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 0, 1$$

$x = -1$ を①に代入すると, $-1 - y = 0$ より, $y = -1$

$x = 0$ を①に代入すると, $0 - y = 0$ より, $y = 0$

$x = 1$ を①に代入すると, $1 - y = 0$ より, $y = 1$

よって, $f(x, y)$ の極値をとり得る点とは, $(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$ の3点である。

また, $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = 12y^2$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -4$ より,

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} D(-1, -1) = 12 \times 12 - 16 > 0 \\ D(0, 0) = -16 < 0 \\ D(1, 1) = 12 \times 12 - 16 > 0 \end{cases}$$

よって, $f_{xx}(x, y) > 0$ は, $x = 0$ のときを除いて成立する。

ゆえに, f は点 $(-1, -1), (1, 1)$ で極小値をとり,

その値は $f(-1, -1) = f(1, 1) = -2$ である。

また, f は点 $(0, 0)$ では極値をとらない。