

問 C.4.3(i)

AHA23007 木下翔太

問題 二変数関数  $f(x, y) = e^x + e^{-x} + y^3 - 3y$  の極値を求めよ.

偏導関数を求めると、

$$f_x(x, y) = e^x - e^{-x}, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3$$

$f$  が  $(a, b)$  で極値を持つとき、 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  を満たすので、連立方程式

$$\begin{cases} e^x - e^{-x} = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

の解が、 $f$  が極値をとる候補点である.

(1) より、

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 0 \\ e^{2x} - 1 &= 0 \\ e^{2x} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

(2) より、

$$\begin{aligned} 3y^2 - 3 &= 0 \\ 3y^2 &= 3 \\ y^2 &= 1 \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$$

よって、極値をとる候補点は、 $(0, 1), (0, -1)$  の 2 点である.

ここで、 $f(x, y)$  の 2 次偏導関数を求めると、

$$f_{xx}(x, y) = e^x + e^{-x}, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 6y$$

また、判別式を  $D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$  とすると、

$$\begin{aligned} D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 \\ &= (e^x + e^{-x}) * 6y - 0^2 \\ &= 6y(e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$

[1](0, 1) について

$D(0, 1) = 6 * 2 = 12 > 0, f_{xx} = 2 > 0$  より、極小値  $f(0, 1) = 0$  をとる.

[2](0, -1) について

$D(0, -1) = (-6) * 2 = -12 < 0$  より、極値をとらない.

以上より、 $f$  は点  $(0, 1)$  で極小値 0 をとる  $\square$