問 C.4.4

g は C4 級の 1 変数関数とし,g’と g’’は共通零点を持たないとする.

2 変数関数 $f(x, y)=g(x)-g''(x)y^2$ は極値を持たないことを示せ.

f が x,y で極値を持つと仮定し背理法により示す.

$f_x=g'(x)\ -g'''(x)y^2$　$f_{xx}=g''(x)\ -g''''(x)y^2$

$f_y=-2g''(x)y$　　　$f_{yy}=-2g''(x)$

$f_{xy}=f_{yx}=-2g'''(x)y$

極値を持つ必要条件は $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$

$f_x(x,y)=0\leftrightarrow\ g'(x)=g'''(x)y^2$…①　$f_y(x,y)=0\leftrightarrow g''(x)y=0$…②

$H(f)=\begin{pmatrix} fxx & fxy \\ fyx & fyy \end{pmatrix}(x,y)$ とおくと極値を持つ必要条件は

$\det H(f)\geqq 0$ となること

②より y=0 又は $g''(x)=0$

y=0 のとき $f_{xx}=g''(x)$, $f_{yy}=-2g''(x)$, $f_{xy}=f_{yx}=0$

よって $\det H(f)=-2\{g''(x)\}^2$

y=0 と①より $g'(x)=0$ g’と g’’は共通零点を持たないので

$g''(x)\neq 0$ ゆえに $\det H(f)=-2\{g''(x)\}^2<0$

$y\neq 0$ かつ $g''(x)=0$ のとき

$f_{xx}=-g''''(x)y^2$　$f_{yy}=0$　$f_{xy}=f_{yx}=-2g'''(x)y$

よって $\det H(f)=-4\{g'''(x)y\}^2$

$y\neq 0, g''(x)=0$, ①, g’と g’’は共通零点を持たない事より

$g'(x)\neq 0$ で $g'''(x)=\frac{g'(x)}{y2}\neq 0$ ゆえに $\det H(f)=-4\{g'''(x)y\}^2<0$

以上より矛盾が導けたので背理法により $f(x, y)=g(x)-g''(x)y^2$ は極値を持たない