問 C.4.5

AHA23040 額田達也

$$f(x,y) = g(x) + g^{(2)}(x)y^n$$

と定義する
$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R^2}$ s.t. 点 (α, β) で極値をもつと仮定する
この時 $df(x,y)/dx = 0|(\alpha,\beta)$ かつ $df(x,y)/dy = 0|(\alpha,\beta)$ が成り立つ
$g^{(1)}(\alpha) + g^{(3)}(\alpha)\beta^n = 0$ かつ $n * g^{(2)}(\alpha)\beta^{n-1} = 0$
n=1 の時、$g^{(2)}(\alpha) = 0$ となり $g^{(1)}(\alpha) \neq 0$ より $g^{(3)}(\alpha) \neq 0$
また,$d^2f(x,y)/dx^2 * d^2f(x,y)/dy^2 - d^2f(x,y)/dxdy * d^2f(x,y)/dxdy|(\alpha,\beta) \geq 0$
よって $\left\{g^{(2)}(\alpha) + g^{(4)}(\alpha)\beta\right\} * 0 - \left\{g^{(3)}(\alpha)\right\}^2 \geq 0$
だが $\left\{g^{(2)}(\alpha) + g^{(4)}(\alpha)\beta\right\} * 0 - \left\{g^{(3)}(\alpha)\right\}^2 = -\left\{g^{(3)}(\alpha)\right\}^2 < 0$ より矛盾
$n > 1$ の時,$\beta = 0$ 又は $g^{(2)}(\alpha) = 0$
$\beta = 0$ の時 $g^{(1)}(\alpha) = 0$ となり仮定に反するよって$\beta \neq 0$ で $g^{(3)}(\alpha) \neq 0$,$g^{(2)}(\alpha) = 0$
また,$d^2f(x,y)/dx^2 * d^2f(x,y)/dy^2 - d^2f(x,y)/dxdy * d^2f(x,y)/dxdy|(\alpha,\beta) \geq 0$
よって $\left\{g^{(2)}(\alpha) + g^{(4)}(\alpha)\beta^n\right\}\left\{n(n-1)g^{(2)}(\alpha)\beta^{n-2}\right\} - \left\{n * g^{(3)}(\alpha)\beta^{n-1}\right\}^2 \geq 0$
だが $\left\{g^{(2)}(\alpha) + g^{(4)}(\alpha)\beta^n\right\}\left\{n(n-1)g^{(2)}(\alpha)\beta^{n-2}\right\} - \left\{n * g^{(3)}(\alpha)\beta^{n-1}\right\}^2 = -\left\{n * g^{(3)}(\alpha)\beta^{n-1}\right\}^2 < 0$ より矛盾
よって題意が示せた