数学基礎演習2・参考資料

$\boxed{1}$

(2023年10月5日(木)配信分)

この参考資料は、主として微積分2で学ぶ多変数(主に 2 変数)関数に関する基礎的事項について、線形代数1A並びに2Aとの関連に重きを置いて解説したものです。また、数学要論Bとの関連についても少し触れています。学習の参考になれば幸いです。

§1. 多変数関数とは何か？

皆さんは、前期の微積分１で、中学から高校にかけて学んで来た関数の連続性、微分、積分などの基礎的な事項について復習し、実はより厳密な論理が必要であることについても、学んだことと思います。

それに続く微積分２では、多変数関数に関する基礎的な事項について学びます。多変数関数とは何かと言うことについては、前期の専門科目、数学要論Ａでより一般の関数や写像、対応の概念を学ぶ際に、その一例として習得済みのことと思いますが、一応ここで簡単におさらいしておきましょう。

高校までに皆さんが学んで来た関数とは、実数 x に対して、何らかのルール(意味不明な場合も含みますが) によって、唯一つの実数 y を対応させることを言い、これを $y=f(x)$ などと書いて表しました。ここで、 x を考える範囲は実数全体 $\mathbf{R}$ とは限りませんでしたが、大前提として $\mathbf{R}$ の部分集合($\mathbf{R}$ 自身を含みます)で、この集合を関数 f の定義域と呼び、しばしば D (domain の頭文字) で表します。この定義域が何か明記したい時は、$f:D\to\mathbf{R}$ と表し、また元どうしの対応は$x\mapsto f(x)$ と表します。

しかし、現実の対応をいろいろ考えるとき、数値化されたデータを処理することに限定しても、とりあえずの出発点を$\mathbf{R}$ の部分集合に限定することは、必ずしも得策とは限りません。

例えば、日本各地の今日の最高気温を関数として処理しようとすると、x としては日本の各地点を選びたい。では、その各地点はどう表すかと言うと、現実にはいくら多くても、有限個の観測地点で計測するわけですから、観測地点に通し番号を振ってしまえば、x は実数どころか、自然数だけで十分で、最高気温も関数と言うより数列として扱えなくもありません。

ただし、日本全体の最高気温の分布を見たいとき、観測地点は細長いと言っても面的に広がる日本の各地点からまんべんなく選びますから、これに順に番号を振ってゆくと、番号の近さが必ずしも地点どうしの近さを反映しないので不便です。さらに、観測地点を増やしてゆく度に、新たに番号をつけてゆくと、すぐ近所の観測地点にかけ離れた番号をつけざるを得ません。

例えば住所の番地や国道の番号などがそんな感じです。

このような不便さは、面的に広がる地点を表すのに、実数１個で済まそうと言う手抜き(あくまで数学の話です) から来ているので、その不便さを解消するには、とりあえず実数２個用いるのがよいでしょう。それでは、その２個をどう選ぶのか？

代表的な答は緯度と経度でしょう。各地点の緯度を x, 経度を y とすれば、それらの組 (x,y) は、座標平面 $\mathbf{R}^2$ の元であり、日本の各地点を表す (x,y) 全体の集合は $\mathbf{R}^2$ の部分集合です。この集合を D と表し、北緯 x 度、東経 y 度の地点の今日の最高気温を $f(x,y)$ 度とすれば、$f: D \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ は関数になります。簡単には $z = f(x,y)$ と表します。

ただし、この関数では、２個の実数の組 (x,y) に対して、唯一つの実数を対応させることになるので、これまで扱って来た、変数が x １個だけの関数と区別する意味で、2 変数関数と呼ばれます。

全く同様に考えて座標空間 $\mathbf{R}^3$ の部分集合を定義域とする関数 $f(x,y,z)$ を 3 変数関数、より一般の n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合を定義域とする関数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を n 変数関数、これまで扱って来た 1 変数関数以外をまとめて多変数関数と呼びます。($\mathbf{R}^n$ の部分集合と言うときも、もちろん $\mathbf{R}^n$ 自身を含みます。)

$\mathbf{R}^n$ の点 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表して、n 変数関数を $f(\boldsymbol{x})$ と表すこともあります。

そうすると、$f(\boldsymbol{x})=f((x_1,x_2,\ldots,x_n))$ ではないかと言う気がしないでもないのですが、通常この括弧は二重に書いたりはしません。

ちなみに、z と言えば通常複素数の意味で用いられることが多く、また何かにつけ高次元への一般化が普通に行われることも考慮して、数学科の講義では、2 変数関数、 3 変数関数もそれぞれ、$y = f(x_1, x_2)$, $y = f(x_1, x_2, x_3)$ で表すことが多いように思います。この資料では、状況に応じ、両方の表記を併用します。

またいずれ、より一般的もしくは抽象的な集合上でも関数を考えることになるため、2 変数、 3 変数とかもあまり言わなくなり、単に関数、或いは定義域を明記して集合 D 上の関数などと呼ぶことが普通になります。

ところで、気象予報では、大体、最高気温と同時に最低気温も報じられることが多いでしょう。北緯 x 度、東経 y 度の地点の今日の最低気温を $g(x,y)$ 度とすれば、$g : D \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto g(x,y)$ は関数になりますが、最高気温と最低気温をデータとして両方を同時に扱いたいときは、対応

$$
\begin{aligned}
&F : D \to \mathbf{R}^2 \\
&(x,y) \mapsto F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))
\end{aligned}
$$

として考えたほうが便利な場合もあります。この場合、与えるデータは実数 2 個の組 $(f(x,y), g(x,y))$ ですから、この対応は関数とは言わず、写像と呼ばれることも、数学要論A で学習済みと思います。

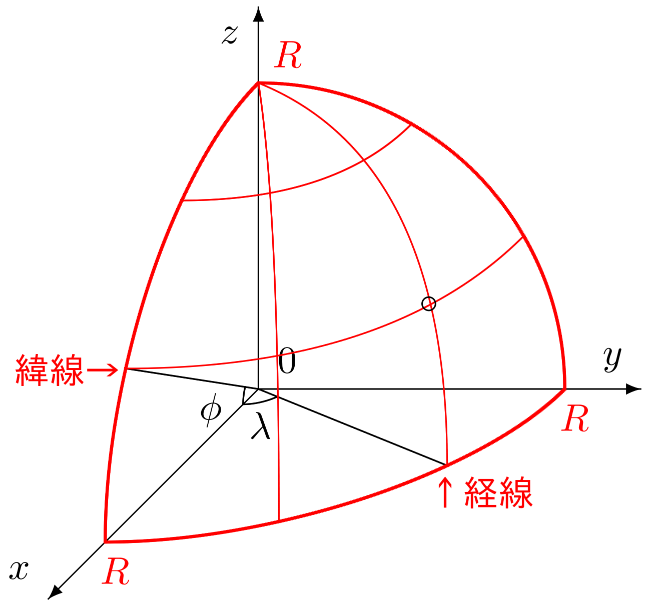
　実は日本の各地点に対し、緯度と経度の組 (x, y) を対応させるのも、この写像の一つの例になっています。なぜなら、地面の上には、元から緯線経線が引かれている訳ではなく、便宜上対応させているだけであって、あくまでも各地点と緯度と経度の組は異なる集合の元に過ぎず、それらが写像

$$\text{日本} \to \mathbf{R}^2$$
$$\text{地点} \mapsto (\text{緯度}, \text{経度})$$

によって、関係付けられているからです。

　このように、もともと実数の組とは無関係な集合に対し、実数の組への写像(ただし単射に限ります) を定めることを、座標を入れるなどと言います。

[練習課題]　地球の表面を $\mathbf{R}^3$ 内の原点中心半径 R の球面と考えたとき、北緯 ϕ, 東経 λ (これらの文字を用いるのが慣例のようです) の地点は $\mathbf{R}^3$ 内のどの点に対応しているか、具体的に式で表してみましょう。



さて、この資料では、高校まで、または前期の微積分1までで、1 変数の関数について考えて来たことを、多変数関数(または写像)について考えて行きます。その 1 変数関数について、皆さんがどのような順番で学んで来たか振り返ってみると、まず小学校で(式では書かないものの) 比例 $y = ax$ と反比例 $y = a/x$ (小学生には難しい？) について学び、中学校で一次関数 $y = ax + b$ と二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ について学び、そして高校でより一般の関数 $y = f(x)$ (主に初等関数と呼ばれる関数たち) について学ぶと共に、それらを微分して傾きを求め、グラフに接線を引き、増減を調べ、さらに２回微分して凹凸を判定し、極値問題を解いたりしました。

　この微分して接線を引くと言う行為は、接点の近くで最も近いと考えられる一次関数によって近似することを意味しています。これは微分できるくらいよい関数については、すぐ近くでの増減は、直線的な変化と大差無いと考えて差し支えないと言う判断から来ているものです。

　さらに２回微分して凹凸を判定する行為は、二次関数による近似を意味しています。これも２回続けて微分できるくらいよい関数は、すぐ近くでのグラフの曲がり具合が、二次関数と大差無いと言う判断です。

　そう言うこともあって、高校までの数学においては、基本となる一次関数と二次関数について、ゆっくりしっかり時間をかけて理解を深めてから、一般の関数に臨みました。

大学で、多変数関数を前にして、考える方針は基本的に同じ、一次関数と二次関数による近似です。ただし、多変数の。そこで、この資料でも、まず 2 変数の一次関数と二次関数について、理解することから始めたいと思います。

実は大学の解析系の講義や教科書では、この部分を駆け足で通り過ぎる場合が多いように思います。その理由は一つではありませんが、大きい理由の一つは、その部分が、より抽象化し一般化した形で、この講義と並行して皆さんが受講している線形代数2Aで解説されていることにあります。ですから、その点を意識しつつ、頑張って理解を深めて欲しいのですが、しかし、同時進行で進む他の授業に丸投げされても、と言う人も少なくないのではと思うので、とりあえず、この資料に直結する部分については、こちらでも、やや丁寧めにお話を進めたいと思います。

いきなり n 変数でもよいのですが、2 変数から n 変数へのギャップは、少なくともこの資料の扱う範囲では、1 変数から 2 変数へのギャップに比べれば、大したことはありません。ですから、とりあえずまず、多少なりとも負担を軽くして、後者を乗り越えることから始めましょうと言うことです。

それに何より 2 変数までは、実際に見える形でグラフが描けます。1 変数関数 $y = f(x)$ について理解するのに、そのグラフを考えることが大変役立ちました。それは 2 変数関数 $z = f(x, y)$ でも同様です。そして 2 変数である程度理解できたら、今度はグラフには頼らず、3 変数ではどうなるか、自分で手を動かして確かめてみると言うのが、程よい練習課題になるでしょう。

ところで、その 1 変数関数 $y=f(x)$ のグラフですが、そもそも何だったかと言うと、座標平面 $\mathbf{R}^2$ (始集合 $\mathbf{R}$ と終集合 $\mathbf{R}$ の積集合) において、点 $(x, f(x))$ たちがなす部分集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

より丁寧に書くと

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists x \in D \text{ s.t. } y = f(x)\}$$

のことでした。

これも数学要論Aで、より一般的な形で学んだと思います。ちなみに、ここで用いた用語の「始集合」は、f を $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への対応と見てのことで、関数(写像)の定義域の意味ではありません。

2 変数関数 $z = f(x, y)$ について、同様にグラフを考えるとすると、座標空間 $\mathbf{R}^3$ (始集合 $\mathbf{R}^2$ と終集合 $\mathbf{R}$ の積集合) において、点 $(x, y, f(x, y))$ たちがなす部分集合

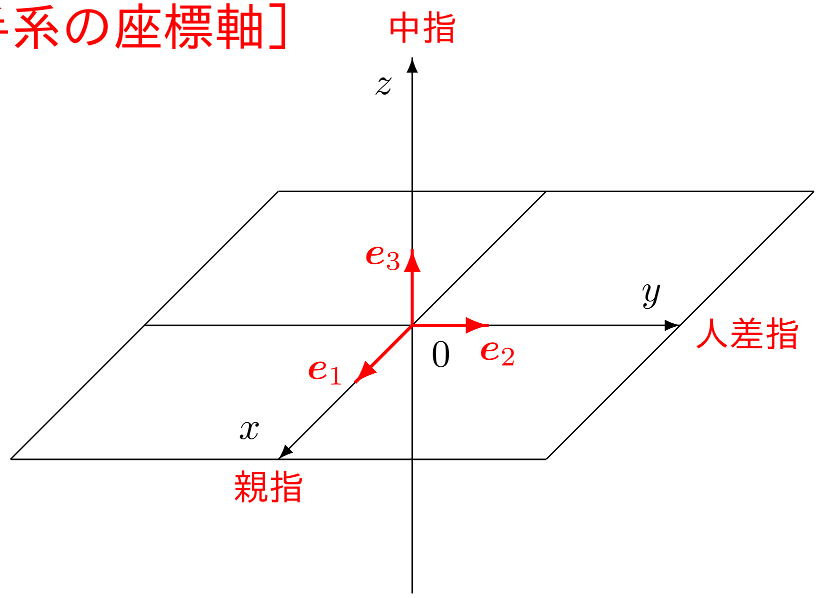
$$\{(x, y, f(x)) \mid (x, y) \in D\}$$

より丁寧に書くと

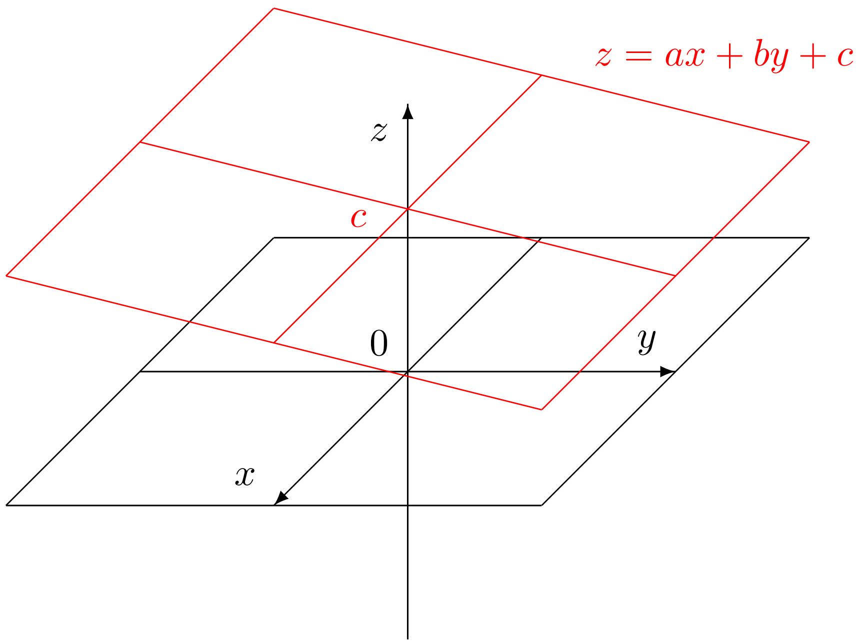
$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \exists (x, y) \in D \text{ s.t. } z = f(x, y)\}$$

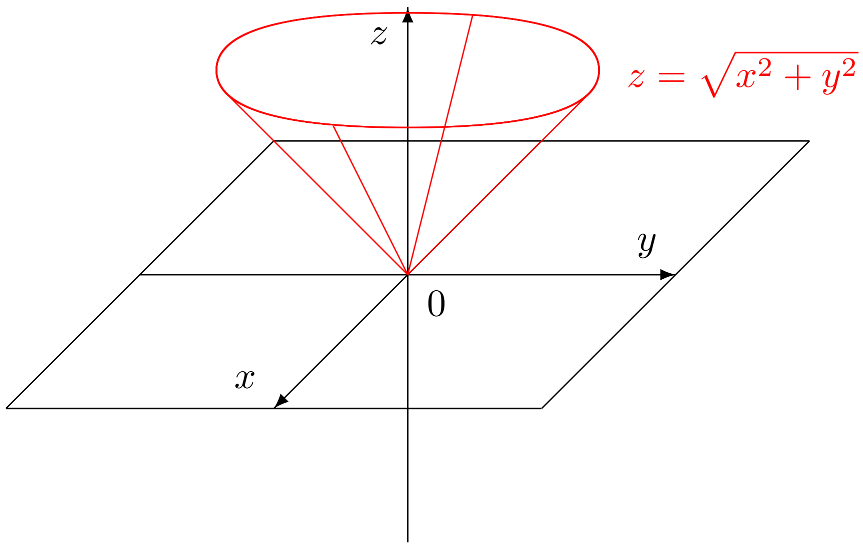
となり、正確には３Ｄで表す必要があります。現実の対応としては、これを２Ｄに落として($\mathbf{R}^2$ に射影して) 表します。最もよく用いられるのは、(練習課題の図でも用いたように) x 軸、y 軸、z 軸のそれぞれ正方向を右手系(右手の親指、人差し指、中指)に配置して、x 軸正方向から見て、右斜め上から見下ろした図を描いたものです。

［右手系の座標軸］



$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の標準基底(線形代数2Aの教科書参照)


$z = ax + by + c$
z
c
0
y
x


z
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$
y
0
x

表したいものによっては、このアングルではわかりにくいこともありますから、この資料では、左斜め上から見た図や後ろから見た図など、必要に応じて違うアングルを用いることもあります。

2 変数関数のグラフの概形を描くときは、手書きであれ、パソコンに頼るのであれ、その特徴がつかみやすいアングルを選ぶ工夫も心がけましょう。その工夫は演習の授業だけでなく、将来の研究発表でのプレゼンにも必ず役に立ちます。

本章は導入で、この資料で扱う内容の紹介も兼ねて、多変数関数とは何かと言うことについてお話しました。次章から本題に入ります。余裕があればその前に、線形代数1Aの連立一次方程式の所を復習しておくことをお勧めします。

付録：線形代数1Aの復習(まとめ)

変数 n 個で m 本の連立一次方程式

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\cdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{cases}
$$

は、

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

とおけば、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表せます。

上の A で、a_{22} と a_{mn} の間が $\ddots$ でないのは、正方行列とは限らないから。

$m=n=2$ のときが、中学校で学んだ(と思います) 2 元連立一次方程式ですが、加減法や代入法などの解法により、多くの場合にはただ 1 組の解(ベクトルとして数えれば 1 個) が見つかるものの、特別な場合には、解なし(不能とも言います)だったり、また無限個の解を持つ(不定とも言います) こともありました。

一般の m, n の場合にも、$m=n$ のときは 2 の場合同様の状況が、また $m>n$ のとき多くは解なしに、$m<n$ のとき多くは無限個の解に、それぞれ偏った状況が見られます。

正確には、行列 A と拡大係数行列 $(A \mid \boldsymbol{b})$ の階数によって判定されます。行列の階数について、詳しくは線形代数2Aで学ぶはずです。

一般に(つまり $m=n=2$ に限らず、また $m=n$, $m \neq n$ のどちらでも) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を斉次方程式(または同次方程式) と言い、一方 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を非斉次方程式(または非同次方程式) と言います。

以下、特に $m=n$ のとき、すなわち変数の個数と式の本数が等しい場合について考えます。

一般に n 次正方行列 A の第 i 行と第 j 列を除いて作った $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを、行列 A の (i,j) 余因子と呼び $\tilde{a}_{ij}$ と表します。(i,j) 余因子 $\tilde{a}_{ij}$ を (j,i) 成分とする行列(つまり (i,j) 成分とする行列の転置行列) を、行列 A の余因子行列と呼び、$\widetilde{A}$ で表します。

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

添字 (i,j) に逆らって転置する必要がある所は、忘れやすいので要注意！

行に関する余因子展開に関連する等式を、この余因子行列を用いて、まとめて表すと、等式 $A\widetilde{A} = |A|\ E$ になります。一方、列に関する余因子展開に関連する等式を、余因子行列を用いて、まとめて表すと、等式 $\widetilde{A}A = |A|\ E$ になります。

従って、$|A| \neq 0$ のとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

により、逆行列を与える公式が得られます。

これを、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に適用すると、$|A| \neq 0$ のとき、ただ一つの解が

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}\boldsymbol{b}$$

により得られることがわかります。

特に、斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は、$|A| \neq 0$ のとき、自明な解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ しか持ち得ません。

この命題の対偶をとれば、斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が非自明な(つまり $\mathbf{0}$ でない) 解を持つとき、$|A| = 0$ でなければならないこともわかります。

実際 $|A| = 0$ のときは、$A\widetilde{A} = O$ が成り立つので、$\widetilde{A} \neq O$ ならば、$\widetilde{A}$ の $\mathbf{0}$ でない列ベクトルが、斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の非自明な解になっており、その 0 でないスカラー倍も全て、非自明な解になります。