# 数学基礎演習2・参考資料

$\boxed{2}$

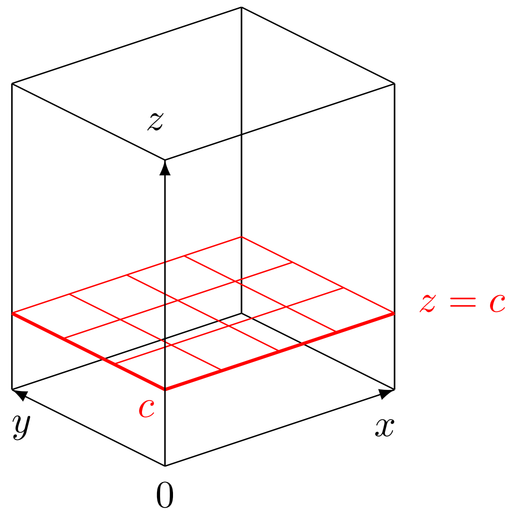
(2022年10月12日(木)配信分)

## §2. 2 変数の一次関数

　$1$ 変数関数の中で最も簡単なのは、一次関数ではなくて定数関数 $f(x)=b$ $(x\in\mathbf{R})$ でした。$x$ の値に依らず $y$ の値が $b$ と言う事で、$y=b$ のグラフは、点 $(0,b)$ を通り $x$ 軸に平行な($\Longleftrightarrow$ $y$ 軸と直交する、水平な) 直線でした。

　$2$ 変数関数の中でも最も簡単なのは、やはり定数関数 $f(x,y)=c$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ です。点 $(x,y)$ の位置に依らず($\Longleftrightarrow$ $x$,$y$ の値に依らず) $z$ の値が $c$ と言う事で、$z=c$ のグラフは、点 $(0,0,c)$ を通り $xy$ 平面に平行な($\Longleftrightarrow$ $z$ 軸と直交する) 平面になります。

　定数を表す文字を $b$ から $c$ に変えたのは、この後すぐ扱う一次関数の定数項に合わせるためで、深い意味はありません。



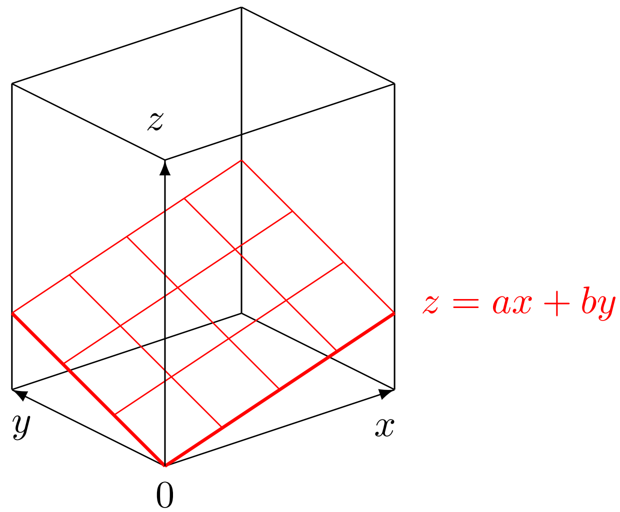

次に、$1$ 変数の一次関数の中で最も簡単な、比例を表す一次関数 $f(x) = ax \ (x \in \mathbf{R})$ (ただし比例定数 $a \neq 0$ ) ですが、$y = ax$ のグラフは、原点 $(0, 0)$ を通り傾き $a$, つまり右へ $1$ 行く毎に、上へ $a$ 上がるような傾きを持つ直線でした。

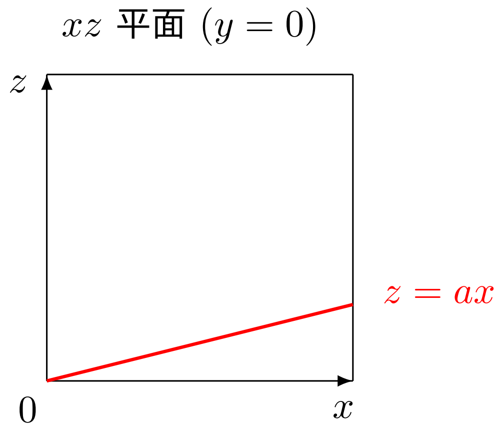
　$2$ 変数の一次関数の中で最も簡単なのは、$f(x, y) = ax + by$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ (ただし $a$, $b$ の少なくとも一方は $0$ でない) です。$z = ax + by$ のグラフは平面になりますが、どのような平面と言えばよいでしょうか？　まず原点 $(0, 0, 0)$ を通ることは確かです。３Ｄを理解するのに、平面に射影すること以外の手段として、平面で切ったときの断面を考えることがあります。

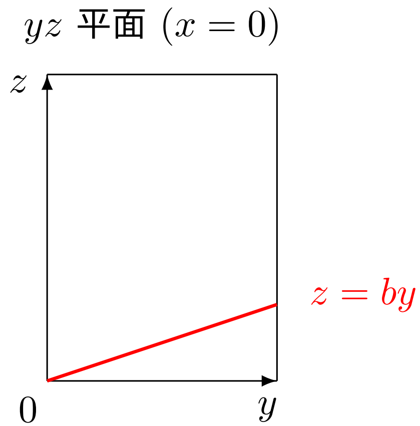
　そこで、まず $xz$ 平面 $y = 0$ と平行な縦の平面 $y = y_0$ ( $y_0$ は定数)で切ってみます。このとき現れる切り口はもちろん $z = ax + by_0$ ですが、ここで $y_0$ は定数ですから、これは平面 $y = y_0$ を $(0, y_0, 0)$ を原点とする $xz$ 平面と見なせば、傾き $a$, $z$ 切片 $by_0$ の直線です。ここでの傾き $a$ は平面 $y = y_0$ の選び方に依りません。どこから出発しても $x$ 軸正方向へ $1$ 行く毎に、上へ $a$ 上がることがわかります。

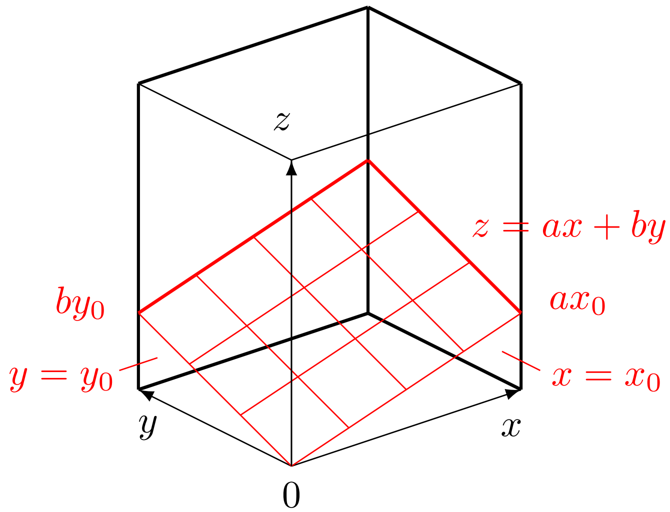
次に切る向きを変えて、$yz$ 平面 $x=0$ と平行な縦の平面 $x=x_0$ ( $x_0$ は定数)で切ってみます。このとき現れる切り口はもちろん $z=by+ax_0$ ですが、ここで $x_0$ は定数ですから、これは平面 $x=x_0$ を $(x_0,0,0)$ を原点とする $yz$ 平面と見なせば、傾き $b$, $z$ 切片 $ax_0$ の直線です。ここでの傾き $b$ も平面 $z=x_0$ の選び方に依りません。どこから出発しても $y$ 軸正方向へ $1$ 行く毎に、上へ $b$ 上がることがわかります。

従って、$z=ax+by$ のグラフは、原点 $(0,0,0)$ を通り $x$ 軸正方向の傾き $a$, $y$ 軸正方向の傾き $b$ であるような平面と言うことになります。

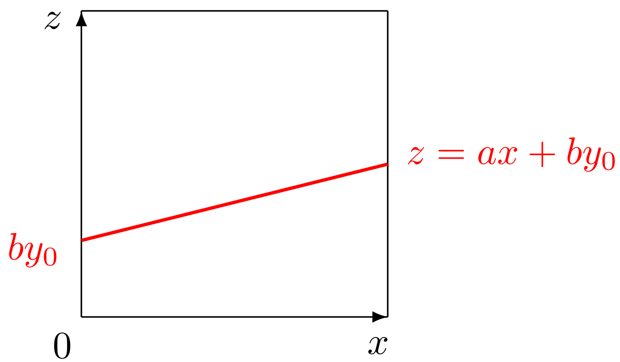

$z$
$z = ax + by$
$y$
$x$
$0$


$xz$ 平面 $(y = 0)$
$z$
$z = ax$
$0$
$x$

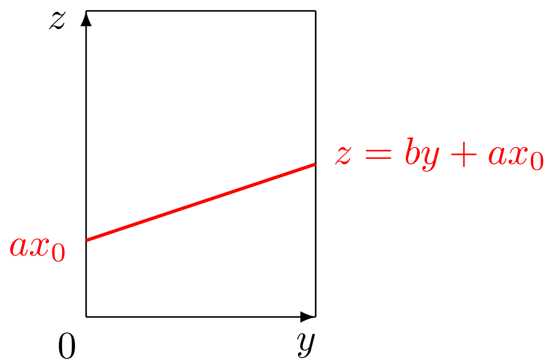

$yz$ 平面 $(x = 0)$
$z$
$z = by$
$0$
$y$




平面 $y = y_0$

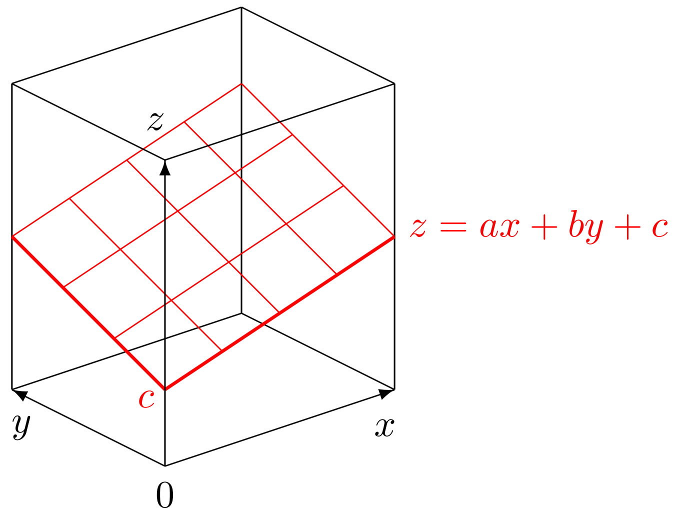



平面 $x = x_0$

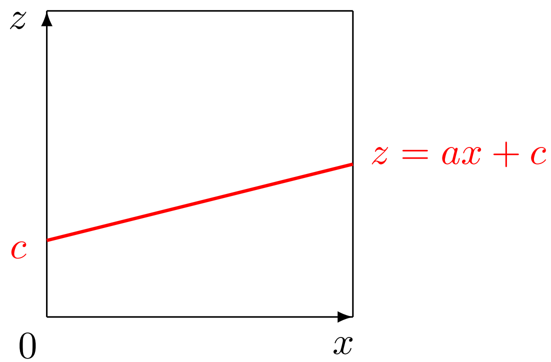


1 変数の一次関数の一般形 $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbf{R})$ (ただし $a \neq 0$ ) については、$y = ax + b$ のグラフは、(上の説明でもう使っていますが) 比例 $y = ax$ のグラフを上に $b$ 平行移動したもの、すなわち点 $(0, b)$ を通り ($\Longleftrightarrow$ $y$ 切片 $b$ で) 傾き $a$ の直線でした。

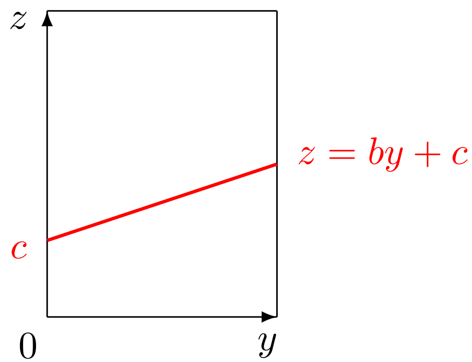
2 変数の一次関数の一般形 $f(x, y) = ax + by + c$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ (ただし $a \neq 0$ または $b \neq 0$ ) については、$z = ax + by + c$ のグラフは、一次関数 $z = ax + by$ のグラフを上に $c$ 平行移動したもの、すなわち点 $(0, 0, c)$ を通り ($\Longleftrightarrow$ $z$ 切片 $c$ で) $x$ 軸正方向の傾き $a$, $y$ 軸正方向の傾き $b$ であるような平面と言うことになります。




$xz$ 平面 $(y = 0)$




$yz$ 平面 $(x = 0)$



$1$ 変数の一次関数は、

(0) $y$ 切片と傾き

(1) 通過する $1$ 点と傾き

(2) 通過する $2$ 点

のどれかを与えると、唯一つに決まりました。そして(1),(2)から決まる一次関数は、それぞれ公式

$$y = a(x - x_1) + y_1$$
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

で与えられました。

(0)は(1)の特別な場合と考えられます。

$2$ 変数の一次関数は、傾きが(とりあえず) $2$ 個あることからもわかるように、もう一つ多くの情報が必要です。

(0) $z$ 切片と $x$ 軸正方向 $y$ 軸正方向それぞれの傾き

(1) 通過する $1$ 点と $x$ 軸正方向 $y$ 軸正方向それぞれの傾き

(2) 通過する $2$ 点と $x$ 軸正方向 の傾き

(2') 通過する $2$ 点と $y$ 軸正方向 の傾き

(3) 通過する $3$ 点

(1)の公式は( $z = ax + by$ を平行移動すればよいだけなので)

$$z = a(x - x_1) + b(y - y_1) + z_1$$

で与えられますが、他はそこまであっさりとは得られません。与えられた通過する $2$ 点(または $3$ 点の内の $2$ 点) が、座標平面と平行な平面上にあるとは限らないので、傾きがすぐに求められないからです。

そこで、ちょっと$1$変数の場合の(2)に戻って、線形代数1Aで学んだことを用いて、公式を導いてみましょう。$2$点$(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ (ただしもちろん$x_1 \neq x_2$ ) を通る直線の方程式を$y = ax + b$とおけば、問題は$a, b$に関する連立方程式

$$\begin{cases} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \end{cases}$$

を解くことに帰着します。ここで求める直線上の任意の点$(x, y)$も$y = ax + b$を満たしますから、それらの点においては

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 + b &= 0 \\ ax_2 - y_2 + b &= 0 \\ ax - y + b &= 0 \end{cases}$$

が成り立たなければなりません。

これを行列とベクトルを用いて表すと、

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となりますが、これは左辺の $3$ 次正方行列を $A$ とおけば、斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が非自明な(つまり $\mathbf{0}$ 以外の) 解を持つことを意味しますから、$|A| = 0$ でなければなりません。

ここで

$$
\begin{aligned}
0 = |A| &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x - x_1 & y - y_1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)
\end{aligned}
$$

ですが、$x_2 - x_1 \neq 0$ なので

$$
y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)
$$

となり、求める公式が得られます。

ここまで考えれば、$2$ 変数の場合の(3)については、同様にして公式が導けるでしょう。$3$ 点 $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$ (ただし $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ は同一直線上にない) を通る平面の方程式を $z = ax + by + c$ とおけば、問題は $a, b, c$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} z_1 &= ax_1 + by_1 + c \\ z_2 &= ax_2 + by_2 + c \\ z_3 &= ax_3 + by_3 + c \end{cases}$$

を解くことに帰着します。ここで求める直線上の任意の点 $(x, y, z)$ も $z = ax + by + c$ を満たしますから、それらの点においては

$$
\begin{cases}
ax_1 + by_1 - z_1 + c &= 0 \\
ax_2 + by_2 - z_2 + c &= 0 \\
ax_3 + by_3 - z_3 + c &= 0 \\
ax + by - z + c &= 0
\end{cases}
$$

が成り立たなければなりません。

　これを行列とベクトルを用いて表すと、

$$
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \\ c \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となりますが、これは左辺の $4$ 次正方行列を $A$ とおけば、斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解を持つことを意味しますから、$|A| = 0$ でなければなりません。

ここで

$$
0 = |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1) - \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1)
$$

$$
+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (y - y_1)
$$

ですが、$(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ は同一直線上にないと言う仮定より $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ は平行でないので(つまり一次独立なので)

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

より、公式

$$z - z_1 = -\frac{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}(x - x_1) + \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}(y - y_1)$$

が得られます。

[練習課題]　(2)(2')の場合について、公式を求めてみましょう。

先に、「$2$ 変数の一次関数は、傾きが(とりあえず) $2$ 個ある」と書きましたが、この「とりあえず」の意味はもちろん、座標軸(正)方向以外にも平面は傾いており、その傾きは進む方向によって異なると言うことです。それでは、平面 $z = ax + by + c$ の、$x$ 軸 $y$ 軸正方向以外の各方向の傾きはどうなっているでしょうか？

そこで $xy$ 平面をベクトル空間と考えて、単位ベクトル $(p, q)$ を任意に一つ選び、その方向に関する平面 $z = ax + by + c$ の傾きを求めてみましょう。単位ベクトルを選んだ理由は、その方向に $1$ 進むことが表しやすいからです。単位ベクトルなので、$p^2 + q^2 = 1$ が成り立つことに注意しておきましょう。

さて、点 $(x_0, y_0, 0)$ を通り、この単位ベクトル $(p, q)$ 並びに $z$ 軸と平行な縦の平面は一般に

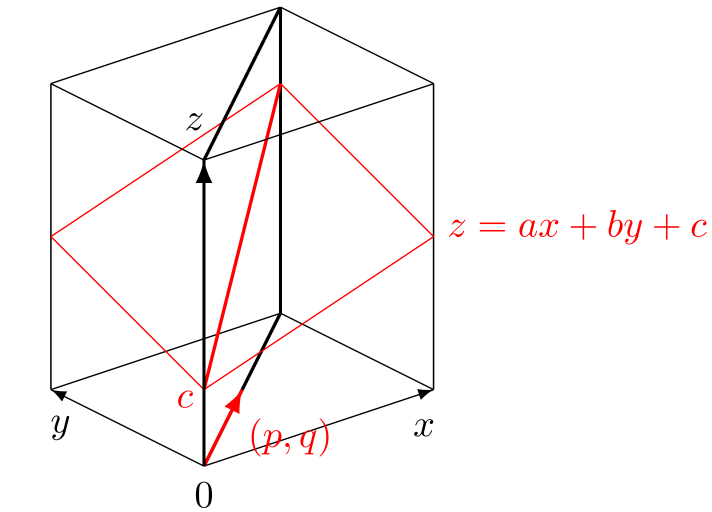
$$(x, y, z) = (pt + x_0, qt + y_0, z) \qquad ((t, z) \in \mathbf{R}^2)$$

とパラメーター表示され、$(p, q)$ が $z$ 軸と垂直な単位ベクトルなので、この $(t, z)$ で長さや角度を普通に測って構いません。(直交座標系を与えていると言います。)

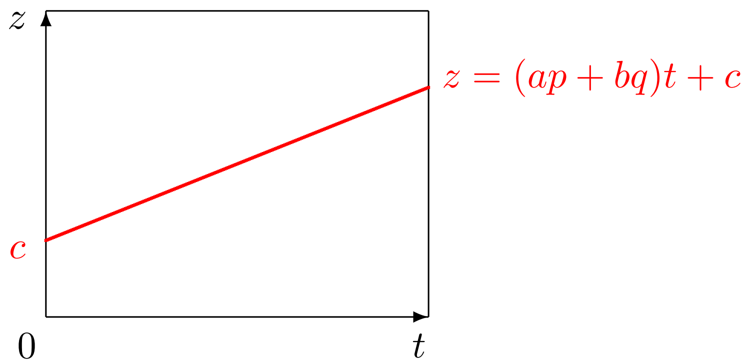
この平面で平面 $z = ax + by + c$ を切ったとき、切り口に現れるのは、

$$z = a(pt + x_0) + b(qt + y_0) + c = (ap + bq)t + (ax_0 + by_0 + c)$$

で、ここで $x_0$, $y_0$ は定数ですから、これは縦の平面を $(x_0, y_0, 0)$ を原点とする $tz$ 平面と見なせば、傾き $ap + bq$, $z$ 切片 $ax_0 + by_0 + c$ の直線です。




$tz$ 平面 $((x, y)//(p, q))$



ここでの傾き $ap+bq$ は $x_0$, $y_0$ の選び方に依りません。どこから出発しても単位ベクトル $(p,q)$ 方向へ 1 行く毎に、上へ $ap+bq$ 上がることがわかります。つまり平面 $z=ax+by+c$ の単位ベクトル $(p,q)$ 方向の傾きは $ap+bq$ であると言えます。

$x$ 軸正方向の傾き $a$ は $(p,q)=(1,0)$ の場合、$y$ 軸正方向の傾き $b$ は $(p,q)=(0,1)$ の場合になりますが、任意の方向の傾きも、この二つの方向の傾きによって決まってしまうことがわかります。

　ところで、$\mathbf{R}^2$ の単位ベクトル $(p,q)$ は、$x$ 軸正方向に対して左回りになす角を $\theta$ とおけば、$(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$ と表すことができます。従って $(p,q)$ 方向の傾きも $ap+bq=a\cos\theta+b\sin\theta$ となり、$\theta$ の 1 変数関数として表せます。

　ここで

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(a\cos\theta+b\sin\theta)=-a\sin\theta+b\cos\theta=0$$

となるのは、

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{b}{a}$$

のとき、すなわち

$$(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)=\pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

のときで、傾き $ap+bq$ は、複号が $+$ すなわち $(p,q)$ が $(a,b)$ と平行で同じ方向の単位ベクトルのとき、最大値 $\sqrt{a^2+b^2}$ をとり、複号が $-$ すなわち $(p,q)$ が $(a,b)$ と平行で逆方向の単位ベクトルのとき、最小値 $-\sqrt{a^2+b^2}$ をとることがわかります。

つまり、平面 $z=ax+by+c$ は、ベクトル $(a,b)$ の方向に、最も傾いており、その傾きの絶対値もベクトル $(a,b)$ の大きさに等しいことになります。その意味で、ベクトル $(a,b)$ を平面 $z=ax+by+c$ 或いは関数 $f(x,y)=ax+by+c$ の勾配ベクトルと呼び、$\mathrm{grad}\, f$ と表します。

実は、$\mathbf{R}^n$ の点は列ベクトルで表すのが慣例で、その場合、速度ベクトルなどの各点における接ベクトルについても、列ベクトルで表すことになります。勾配ベクトルも接ベクトルの一つなので、やはり列ベクトルで表すのが筋なのですが、今の処、$\mathbf{R}^2$ の点を行ベクトルで表しているので、勾配ベクトルもそれに合わせて行ベクトルで表しておきます。行ベクトルと列ベクトルの使い分けの意味については、回を改め、全微分の所で少しお話します。

$\boxed{\text{練習課題の解答}}$

$\boxed{\S 1}$

$\mathbf{R}^3$ の座標は$(x, y, z)$ で表すことにしましょう。$\mathbf{R}^3$ 内の原点中心半径 $R$ の球面は$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ で、赤道面は $xy$ 平面、赤道はそれらの交わりなので$xy$ 平面の原点中心半径 $R$ の円周と言うことになります。

北緯 $\phi$ $(0 \leq \phi < \dfrac{\pi}{2})$ の緯線は、そこから上に角度 $\phi$ だけ上がったところなので、平面 $z = \sin\phi$ との交わりである半径 $R\cos\phi$ の円周です。

一方、$xy$ 平面における偏角は、通常 $x$ 軸正方向から測り始めるので、経度 $0$ の子午線は、$xz$ 平面の $x \geq 0$ である半平面と球面との交わりと考えるのが自然でしょう。

以上より、北緯 $\phi$, 経度 $0$ の地点は

$$(x, y, z) = (R\cos\phi, 0, R\sin\phi)$$

となりますから、北緯 $\phi$, 東経 $\lambda$ $(0 \leq \lambda \leq \pi)$ の地点は、これを $z$ 軸中心(上から見て)左回りに $\lambda$ 回った

$$(x, y, z) = (R\cos\phi\cos\lambda, R\cos\phi\sin\lambda, R\sin\phi)$$

と言うことになります。

微積分の教科書においては、球面や $\mathbf{R}^3$ に極座標を入れる場合、緯度にあたる座標を北極から測り、赤道で $0$ にならないように定めるのが慣例のようなので、併用する際には要注意です。