数学基礎演習2・参考資料

$\boxed{3}$

(2022年10月19日(木)配信分)

§3. 2 変数の二次関数

2 変数の一次関数について、大まかなイメージはつかめたでしょうか？

次に 2 変数の二次関数について、調べてみたいと思います。

1 変数の二次関数で、最も基本的なのは、$y = ax^2$ $(x \in \mathbf{R})$ (ただし $a \neq 0$) で、そのグラフは原点を通る(より詳しくは原点を頂点とし、y 軸に関して対称な) 放物線で、$a > 0$ のとき下に凸、$a < 0$ のとき上に凸になっていました。

$y = ax^2 + c$ $(x \in \mathbf{R})$ のグラフは、これを上に c だけ平行移動したもの、さらに$y = ax^2 + bx + c$ $(x \in \mathbf{R})$ のグラフは

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

より、$y = ax^2$ のグラフを右に $-\frac{b}{2a}$, 上に $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 平行移動したものでした。

従って、グラフの形そのものは2 次の係数である a だけで決まりました。さらに$y = x^2$ に $(x, y) = (aX, aY)$ を代入すれば $aY = (aX)^2$ より$Y = aX^2$ となることから、放物線 $y = ax^2$ は放物線 $y = x^2$ を $\frac{1}{|a|}$ 倍に相似拡大したもの(さらに $a < 0$ のときは、原点について点対称移動したもの) とわかるので、相似な図形どうしは区別しないことにすれば、全てのグラフは同じ形と言うことになります。

ところが、2 変数の二次関数では、このような都合のよいことは起こりません。一般的な形を考えると、

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + kx + ly + m \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

(ただし a, b, c の内、少なくとも一つは 0 でない) (b でなく $2b$ としているのは、後の計算で式を見やすくするため) となりますが、これらの表すグラフの内、どれとどれが(合同または相似なものを同一視するとして) 同じ形になるのか、分類する必要があります。

ここでも、とりあえず簡単なものから見て行きましょう。2 変数の二次関数の中で最も簡単なものと言えば $z = ax^2 + cy^2$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ (ただし $a \neq 0$ または $c \neq 0$) か $z = 2bxy$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ (ただし $b \neq 0$) でしょう。

それぞれのグラフは、いずれも曲面になりますが、どのような曲面かと言うと、$z=ax^2+cy^2$ の方は、xz 平面 $y=0$ で切ると $z=ax^2$, yz 平面 $x=0$ で切ると $z=cy^2$ で係数 a, c が 0 でなければ放物線が現れますが、係数が違えば(合同ではないと言う意味で) 別の放物線になります。

さらに一次関数のときにも用いた他の向きの縦の平面(pt,qt,z) $((t,z)\in\mathbf{R}^2)$ $(p^2+q^2=1)$ で切ると $z=(ap^2+cq^2)t^2$ で $a\neq c$ のときは(p,q) が動くにつれて別の放物線になり、特に a, c が異符号のときは、a, c が共に 0 でなくても$ap^2+cq^2=0$ となる

$$(p,q)=\left(\frac{\pm\sqrt{|c|}}{\sqrt{|a|+|c|}},\frac{\pm\sqrt{|a|}}{\sqrt{|a|+|c|}}\right)$$

(複号は同順とは限りません) に対して、水平な直線 $z=0$ が切り口に現れます。

ここで $p^2+q^2=1$ より、

$$\min\{a,c\} \leq ap^2+cq^2 \leq \max\{a,c\}$$

が成り立ちますから、切り口の放物線の曲がり具合(凹凸) が最も極端なのは、座標平面で切った場合と言うこともわかります。

上の不等式の証明がわからない人は、$ap^2+cq^2=a(1-p^2)+cp^2$ は実数直線上で a と c を $p^2:(1-p^2)$ に内分すると考えればよいでしょう。また、一次関数のグラフの傾きを調べたときのように $(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$ とおいて、$ap^2+cq^2=a\cos^2\theta+c\sin^2\theta$ の増減を調べても構いません。

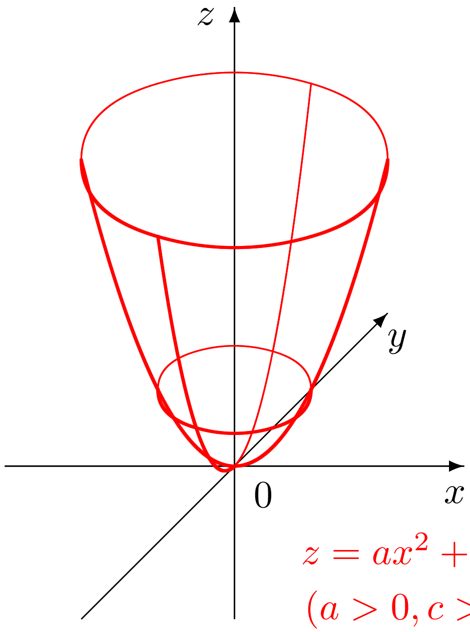
一方 $a=c$ ならば、$p^2+q^2=1$ より、(p,q) に依らず、共通の放物線 $z=at^2$ が現れます。

ここで切る向きを変えて、水平な平面 $z=r$ で切ってみるとどうなるでしょうか？

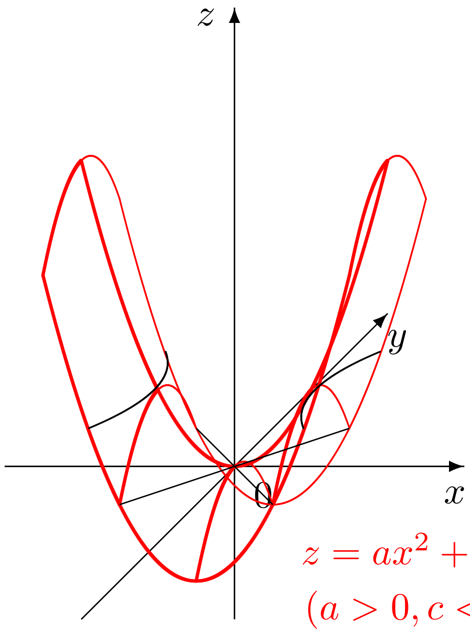
断面に現れる曲線はもちろん $ax^2+cy^2=r$ ですが、これは多分皆さんが高校で習った二次曲線です。つまり

(1) a, c が同符号(もちろん 0 でない)のとき、これらと同符号の r に対しては楕円、$r=0$ では一点、異符号の r に対しては空集合になります。このことからグラフの曲面は楕円放物面と呼ばれます。特に $a=c$ のときは、水平な切り口たちは同心円になるので、グラフは放物線の回転面です。

(2) a, c が異符号(もちろん 0 でない)のとき、$r \neq 0$ に対しては双曲線、$r=0$ では交わる二直線(より詳しくは $r \neq 0$ で現れる双曲線たちの漸近線) になります。このことからグラフの曲面は双曲放物面と呼ばれます。特に $-a=c$ のときは、水平な切り口たちは直角双曲線です。

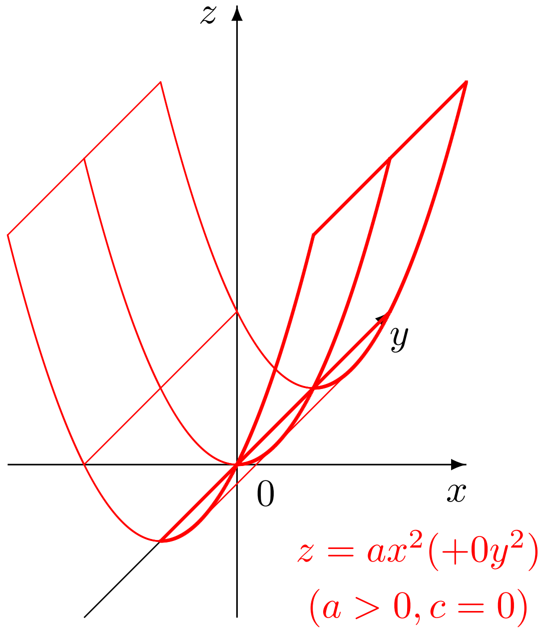


$z = ax^2 + cy^2$
$(a > 0, c > 0)$



$z = ax^2 + cy^2$
$(a > 0, c < 0)$

(3) a, c の一方が 0 のとき、0 でない方と同符号の r に対しては平行な二直線、$r=0$ では(それらが重なって一本になった)直線、異符号の r に対しては空集合になります。グラフの曲面は放物柱面と呼ばれます。



ここまでの観察から既に明らかなように、2 変数の二次関数のグラフは、1 変数の場合と違って、係数によって互いに相似ではない違った形状の曲面になります。(係数の比が同じなら相似です。)

ちなみに、$z = 2bxy$ の方はどうかと言うと、xz 平面 $y = 0$ で切ると $z = 0$, yz 平面 $x = 0$ で切ると $z = 0$ で、いずれも水平な直線 $z = 0$ になり、平面(pt, qt, z) $((t, z) \in \mathbf{R}^2)$ で切ると $z = 2bpqt^2$ で、(p, q) が動くにつれて$(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ つまり座標平面の場合を除いて別の放物線になります。

一方、水平な平面 $z = r$ で切ると、断面に現れる曲線 $2bxy = r$ は、言うまでもなく$r \neq 0$ では直角双曲線、$r = 0$ では直交する二直線になり、これは $z = ax^2 + cy^2$ の$-a = c$ のときと同じ曲面です。

[練習課題]　この場合、縦の切り口の放物線の曲がり具合の目安となる 2 次の係数$2bpq$ が最大及び最小となるのは、どのような切り口で切った場合か、調べてみましょう。

さて、それでは、これらを足し合わせてもう少し一般化した $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ (ただし a, b, c の内、少なくとも一つは 0 でない) ではどうなるでしょうか？

全ての二次関数を理解するためには、まずこの場合を全て分類する必要があります。そこで役に立つのが、線形代数2A で学ぶ実対称行列の対角化です。まだそこまで進んでいないと思いますので、そこから今必要なことも併せてお話します。

そのためにはまず

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおきます。このとき上の二次関数は

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と表せます。($2b$ にした理由はこれです。)

今、一般にn 次正方行列 A に対し、$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたすスカラー λ (実数か複素数かは、そのとき考えている設定によります) と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ の組が存在するとき、λ を行列 A の固有値、$\boldsymbol{x}$ を行列 A の固有ベクトルと呼びます。$\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルならば、その 0 でないスカラー倍も固有ベクトルになることに、ちょっと注意しておきましょう。

これらが存在するとき、$\boldsymbol{x}$ に関する方程式$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は非自明な解を持つわけですから、$|\lambda E - A| = 0$ が成り立ちます。この等式を、行列 A の固有方程式(左辺のことは固有多項式) と呼び、その各解に対し、$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は非自明な解を持つので、各解は A の固有値となります。固有方程式は一般に n 次方程式になります。

たとえば、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

なら、

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a)(\lambda - c) - (-b)^2 \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) \\ &= \lambda^2 - \mathrm{tr}\, A\, \lambda + |A| \end{aligned}$$

です。

従って、固有方程式が重解を持たなければ、複素数の範囲でなら n 個の固有値と固有ベクトルの組がとれることになります。異なる固有値に関する固有ベクトルは一次独立であることも示せます。

ところが、A が実対称行列の場合には、固有方程式の解は全て実数で、異なる固有値に関する固有ベクトルは一次独立であるばかりか、互いに直交し、しかもたとえ重解を持ったとしても、その重複分だけ、一次独立な固有ベクトルがとれるのです。

一般の場合の証明は、線形代数2Aに丸投げしますが、今考えている A について言えば、固有方程式の判別式は

$$(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

ですから、確かに実数解を持ち、重解を持つのは $a = c$ かつ $b = 0$ のときに限ります。このとき A は対角行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ですから、$a = c$ であろうとなかろうと、a に関する固有ベクトルとして $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c に関する固有ベクトルとして $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとれば、主張が成り立っています。

以下、$a \neq c$ または $b \neq 0$ で、A の固有方程式が異なる 2 個の実数解 λ_1, λ_2 を持つ場合を考えましょう。もちろんここで、二次方程式の解の公式を用いて、これらを具体的に書くことは可能ですが、根号を含む式を書きたくないので、ここはなるべく、解と係数の関係

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + c, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = ac$$

でしのぎたいと思います。

さて、$\lambda_j \ (j = 1, 2)$ に対し、

$$\boldsymbol{x}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j - c \\ b \end{pmatrix}$$

または

$$\boldsymbol{x}_j = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_j - a \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j - a)(\lambda_j - c) - b \cdot b \ &= \ {\lambda_j}^2 - (a + c)\lambda_j + (ac - b^2) \ = \ 0 \\
(-b)(\lambda_j - c) + (\lambda_j - c)b \ &= \ 0
\end{aligned}
$$

または

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j - a)b - b(\lambda_j - a) \ &= \ 0 \\
(-b)b + (\lambda_j - c)(\lambda_j - a) \ &= \ {\lambda_j}^2 - (c + a)\lambda_j + (b^2 + ca) \ = \ 0
\end{aligned}
$$

より、いずれにせよ

$$
\begin{pmatrix} \lambda_j - a & -b \\ -b & \lambda_j - c \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}
$$

をみたします。

　ここで、仮定 $a \neq c$ または $b \neq 0$ より、上でおいた $\boldsymbol{x}_j$ の内、少なくとも一方は $\mathbf{0}$ にならないので、λ_j に関する固有ベクトルとして採用できます。ここで、どちらを採用しようと

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1 - c)(\lambda_2 - c) + b \cdot b &= \lambda_1\lambda_2 - c(\lambda_1 + \lambda_2) + c^2 + b^2 \\
&= (ac - b^2) - c(a + c) + c^2 + b^2 \ = \ 0 \\
(\lambda_1 - c)b + b(\lambda_2 - a) &= b(\lambda_1 + \lambda_2 - c - a) \ = \ 0 \\
b(\lambda_2 - c) + (\lambda_1 - a)b &= b(\lambda_2 + \lambda_1 - c - a) \ = \ 0 \\
b \cdot b + (\lambda_1 - c)(\lambda_2 - c) &= b^2 + \lambda_1\lambda_2 - c(\lambda_1 + \lambda_2) + c^2 \\
&= b^2 + (ac - b^2) - c(a + c) + c^2 \ = \ 0
\end{aligned}
$$

より $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ が成り立つので、$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交します。

　以上で $n = 2$ の場合の証明はおしまいです。

ここで

$$\boldsymbol{p}_j = \frac{\boldsymbol{x}_j}{||\boldsymbol{x}_j||} \qquad (j = 1, 2)$$

とおけば、$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は互いに直交する単位ベクトルになるので、これらを並べてできる 2 次正方行列 $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)$ は直交行列（ ${}^tPP = P{}^tP = E$ ）になります。ここで $|P| = \pm 1$ ですが、

$(\because\ 1 = |E| = |{}^tPP| = |{}^tP| \cdot |P| = |P| \cdot |P| = |P|^2\,)$ もし $|P| = -1$ なら、さらにあらかじめ、たとえば $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ のどちらか一方を -1 倍しておきましょう。そうすれば $|P| = 1$ になります。

さて、固有ベクトルの 0 でないスカラー倍もまた、同じ固有値の固有ベクトルになる、すなわち $A\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j \ (j = 1, 2)$ が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned} AP = A(\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2) \ &= \ (A\boldsymbol{p}_1 \ A\boldsymbol{p}_2) \ = \ (\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \ \lambda_2\boldsymbol{p}_2) \\ &= (\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ = \ P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

さらに P は直交行列より $P^{-1} = {}^tP$ ですから

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が成り立ちます。

これを実対称行列の直交行列による対角化と言います。(ここでは 2 次で説明していますが、同様のことが n 次でも可能です。) 右辺の行列を Λ で表すことにして、本題に戻りましょう。

今考えている 2 変数の二次関数は、この対角行列 Λ と直交行列 P を用いると、次のように表せます。

$$
\begin{aligned}
ax^2 + 2bxy + cy^2 &= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}P\,{}^tPAP\,{}^tP\boldsymbol{x} \\
&= {}^t({}^tP\boldsymbol{x})\Lambda({}^tP\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

そこで${}^tP\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と置いて座標変換してやると、

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= {}^t\widetilde{\boldsymbol{x}}\Lambda\widetilde{\boldsymbol{x}} \\ &= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \end{aligned}$$

となり XY の項が無い二次関数として表せます。

　ここで P は $|P| = 1$ の直交行列なので、$\widetilde{\boldsymbol{x}} = {}^tP\boldsymbol{x}$ は長さも角度も変えない原点中心の回転だけによる座標変換になっていて、(つまり $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と表せます) この新しい座標で見ても、グラフの形状そのものは元の座標で見たものと合同になっています。

と言うことは、$2bxy$ の項があっても、グラフの形は $z = ax^2 + cy^2$ の場合の分類に尽きると言うことになります。

つまり

(1) 固有値が同符号($ac - b^2 > 0$)のとき、楕円放物面。特に固有値が一致する($a = c$ かつ $b = 0$)のときは、放物線の回転面。

(2) 固有値が異符号($ac - b^2 < 0$)のとき、双曲放物面。

(3) 固有値 の一方が 0 ($ac - b^2 = 0$)のとき、放物柱面。

です。

しかも

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = P\widetilde{\boldsymbol{x}} \ &= \ (\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= X\boldsymbol{p}_1 + Y\boldsymbol{p}_2
\end{aligned}
$$

より、新しい座標軸 X 軸と Y 軸は、それぞれ固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 方向を向いているので、原点を通る縦の断面に現れる放物線の曲がり具合の両極端は、固有ベクトルの方向で切ったとき現れると言うこともわかります。

　最後に最も一般的な形

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + kx + ly + m \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

についても考えておきましょう。A, $\boldsymbol{x}$ に加えて

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$$

とおけば、上の二次関数は

$$z = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + m$$

と表せます。

　これを A の対角化に用いた直交行列 P を用いて座標変換を施すと

$$z = {}^t\widetilde{\boldsymbol{x}}\Lambda\widetilde{\boldsymbol{x}} + {}^t\boldsymbol{b}P\,{}^tP\boldsymbol{x} + m = {}^t\widetilde{\boldsymbol{x}}\Lambda\widetilde{\boldsymbol{x}} + {}^t({}^tP\boldsymbol{b})\widetilde{\boldsymbol{x}} + m$$

となるので、${}^tP\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}$ と係数も置き換えてやると、

$$z = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + KX + LY + m$$

となります。

　一般には項数は減りませんが、固有値が共に 0 でなければ、X, Y それぞれで平方完成できて、先の分類(1)または(2)の

$$z = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

のグラフを平行移動したグラフになることが 1 変数の場合同様に示せます。

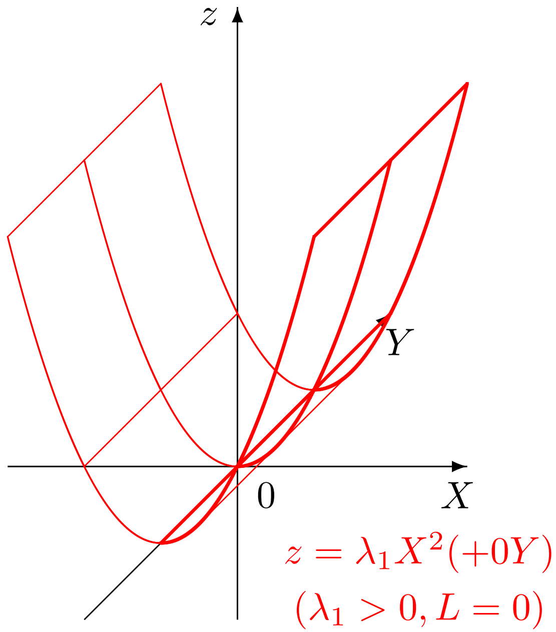
固有値の一方が 0 の場合は、例えば $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ とすれば、

$$z = \lambda_1 X^2 + KX + LY + m$$

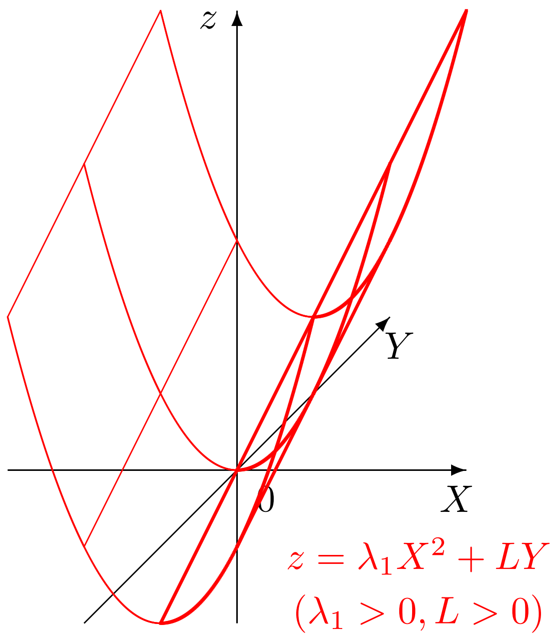
ですが、これは X しか平方完成できないので、

$$z = \lambda_1 X^2 + LY$$

のグラフを平行移動したグラフになります。これは $L = 0$ なら既に見た分類(3)の放物柱面ですが、$L \neq 0$ ならこれが傾いた形状になり、グラフとしては別の物になります。



z
Y
0
X
$z = \lambda_1 X^2 (+0Y)$
$(\lambda_1 > 0, L = 0)$



z
Y
0
X
$z = \lambda_1 X^2 + LY$
$(\lambda_1 > 0, L > 0)$

ここまで見て来たように、2 変数になった途端に、二次関数と言っても様々で、1 変数の場合ほど簡単ではないことがわかります。と言っても、これで全てであって、さらに変数が増えても、基本的には行列 A の固有値の符号を見れば、分類できると言うこともわかります。

冒頭でも述べたように、これから、一般の多変数関数の増減や極値問題を考えるにあたって、ここで分類した二次関数がとりあえず最初に使えるモデルであると言うことを念頭におきつつ、学習を進めて行きましょう。

なお、ここまでの内容がまだ理解できないと言う人は、とりあえずはこう言う事実があって、それが重要なのだと気に留めておき、線形代数2Aの講義が進むにつれて、理解を深めて行ってもらえればと思います。

練習課題の解答

§2

2 点 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (ただし (2) では $y_1 \neq y_2$, (2') では $x_1 \neq x_2$) を通る平面の方程式を $z = ax + by + c$ とおけば、問題は

(2) a が与えられているので、b, c に関する連立方程式

(2') b は与えられているので、a, c に関する連立方程式

$$\begin{cases} z_1 &= ax_1 + by_1 + c \\ z_2 &= ax_2 + by_2 + c \end{cases}$$

を解くことに帰着します。ここで求める直線上の任意の点 (x, y, z) も $z = ax + by + c$ を満たしますから、それらの点においては

$$
\begin{cases}
ax_1 + by_1 - z_1 + c &= 0 \\
ax_2 + by_2 - z_2 + c &= 0 \\
ax + by - z + c &= 0
\end{cases}
$$

が成り立たなければなりません。

これを行列とベクトルを用いて表すと、(2) では

$$
\begin{pmatrix} y_1 & z_1 - ax_1 & 1 \\ y_2 & z_2 - ax_2 & 1 \\ y & z - ax & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b \\ -1 \\ c \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となりますが、これは左辺の 3 次正方行列を A_a とおけば、斉次方程式 $A_a\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が非自明な解を持つことを意味しますから、$|A_a| = 0$ でなければなりません。

ここで

$$
\begin{aligned}
0 = |A_a| \ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 - ax_1 & 1 \\ y_2 & z_2 - ax_2 & 1 \\ y & z - ax & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 - ax_1 & 1 \\ y_2 - y_1 & (z_2 - z_1) - a(x_2 - x_1) & 0 \\ y - y_1 & (z - z_1) - a(x - x_1) & 0 \end{vmatrix} \\
&= (y_2 - y_1)\{(z - z_1) - a(x - x_1)\} \\
&\qquad -\{(z_2 - z_1) - a(x_2 - x_1)\}(y - y_1)
\end{aligned}
$$

ですが、仮定$y_1 \neq y_2$ より、公式

$$
z - z_1 = a(x - x_1) + \frac{(z_2 - z_1) - a(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}(y - y_1)
$$

が得られます。

一方 (2') では、

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 - by_1 & 1 \\ x_2 & z_2 - by_2 & 1 \\ x & z - by & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となりますが、これは左辺の 3 次正方行列を A_b とおけば、斉次方程式 $A_b\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解を持つことを意味しますから、$|A_b| = 0$ でなければなりません。

ここで

$$
\begin{aligned}
0 = |A_b| &= \begin{vmatrix} x_1 & z_1 - by_1 & 1 \\ x_2 & z_2 - by_2 & 1 \\ x & z - by & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & z_1 - by_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & (z_2 - z_1) - b(y_2 - y_1) & 0 \\ x - x_1 & (z - z_1) - b(y - y_1) & 0 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)\{(z - z_1) - b(y - y_1)\} \\
&\qquad\qquad - \{(z_2 - z_1) - b(y_2 - y_1)\}(x - x_1)
\end{aligned}
$$

ですが、仮定$x_1 \neq x_2$ より、公式

$$
z - z_1 = \frac{(z_2 - z_1) - b(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + b(y - y_1)
$$

が得られます。