

数学基礎演習2・参考資料

4

(2022年10月26日(木)配信分)

§4. 2 変数関数の極限と連続性

さて、これからいよいよ、一般の多変数関数について、連続性、微分、積分と言った、1 変数関数で学んで来たのと同様の事柄を考えてゆくのですが、これらに共通の基本的な事柄として、まず極限(値)と言うものがありました。

高校までに学んだ極限といえは、まず次の二つでしょう。

(1) 数列の極限：無限数列 a_n において、 n が限りなく大きくなる
とき、 a_n が限りなくある実数 a に近付くならば、

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき a_n は a に収束する、または

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$n \rightarrow \infty$ のときの a_n の極限值は a であるなどと言う。

(2) 関数の極限：関数 $f(x)$ において、 x が限りなく a に近付くとき、 $f(x)$ が限りなくある実数 α に近付くならば、

$$f(x) \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a)$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は α に収束する、または

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

$x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限值は α であるなどと言う。

と言ったものでした。

ここで無限数列とは、写像 $a. : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ のことであり、関数とは、写像 $f : (\mathbf{R} \supset) D \rightarrow \mathbf{R}$ のことと考えて、この資料では、これらを、写像 $a. : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 及び写像 $f : (\mathbf{R}^n \supset) D \rightarrow \mathbf{R}$ に一般化したわけです。後者は既に話題にしている n 変数関数ですが、前者は各 a_n が最早 $\mathbf{R}$ の元である数ではなく、 $\mathbf{R}^n$ の元である n 次元空間内の点なので、**点列**と呼びます。

そこで、

(1') **点列の極限** : $\mathbf{R}^n$ 内の無限点列 a_n において、 n が限りなく大きくなるとき、 a_n が限りなくある点 a に近付くならば、

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき a_n は a に**収束**する、または

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$n \rightarrow \infty$ のときの a_n の**極限**は a であるなどと言う。

(2) **多変数関数の極限** : n 変数関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ において、 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ が限りなく $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ に近付くとき、 $f(\boldsymbol{x})$ が限りなくある実数 α に近付くならば、

$$f(\boldsymbol{x}) \rightarrow \alpha \quad (\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{a})$$

$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{a}$ のとき $f(\boldsymbol{x})$ は α に**収束**する、または

$$\lim_{\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$$

$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{a}$ のときの $f(\boldsymbol{x})$ の**極限值**は α であるなどと言う。

と、まあこれだけならコピー・ペースト・一括変換だけで事足りる一般化に見えます。

ここで注意しなければならないのは、「限りなく大きく」「限りなく近付く」と言う少々漠然として曖昧な言い回しです。もちろん、実数が実数に近付くとは、その差(または差の絶対値)が0に近付くと言うことでしょうから、1変数の場合は

(1-1) $n \rightarrow \infty$ とは $\frac{1}{n}$ が 0 に近付く

(1-2) $a_n \rightarrow a$ とは $a_n - a$ (または $|a_n - a|$) が 0 に近付く

(2-1) $x \rightarrow a$ とは $x - a$ (または $|x - a|$) が 0 に近付く

(2-2) $f(x) \rightarrow \alpha$ とは $f(x) - \alpha$ (または $|f(x) - \alpha|$) が 0 に近付く
と言うことと考えられますから、多変数の場合、変更が必要な

(1-2),(2-1)については、それぞれ差を距離(位置ベクトルの差の絶対値)に置き換えればよいことは容易に想像がつきます。

すなわち

(1'-2) $a_n \rightarrow a$ とは $|a_n - a|$ が 0 に近づく

(2'-1) $x \rightarrow a$ とは $\|x - a\|$ が 0 に近づく

ということと考えられます。

($a_n - a$ が 0 に近づくや、 $x - a$ が 0 に近づくでもよいのですが、ここでは敢えて、絶対値・距離を用いて言い表しています。)

問題は実は、しばしば省略されがちですが、「…のとき」の次に、「その近付き方に依らず同じ極限值に」という暗黙の了解があるということです。

また、まず 1 変数の場合で言うと、

- (1) n が限りなく大きくなる時、 n が自然数を小さいほうから順に一つも飛ばさず大きくなって行こうと、偶数だけ選んで大きくなって行こうと、奇数だけ選んで大きくなって行こうと、素数だけ選んで大きくなって行こうと、その他ありとあらゆる大きくなり方を全て考えても、それらの選び方に依らず、 a_n が a に近づく
- (2) x が限りなく a に近づくとき、それが右からであろうが、左からであろうが、連続的にであろうが、飛び飛びにであろうが、とにかく x が a に近づくありとあらゆる近付き方を全て考えて、それらの選び方に依らず、 $f(x)$ が α に近づく

と言う面倒くさい意味だったわけです。

しかしながら、点列の極限に一般化するにあたって、たとえば 2 次元の場合なら、 $\mathbf{a}_n = (a_n, b_n)$ ($n \in \mathbf{N}$), $\mathbf{a} = (a, b)$ とすれば、

$$\begin{aligned}\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} &\leq \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| \\ &= \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \\ &\leq \sqrt{2} \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}\end{aligned}$$

が成り立ちますから、点列 $\mathbf{a}_n$ が点 $\mathbf{a}$ に近付くことと、 $\mathbf{a}_n$ の成分である数列 a_n と b_n が $\mathbf{a}$ の成分である実数 a と b に、それぞれ同時に近付くことは同値です。従って 1 次元のときの議論を厳密にできれば、そのまま 2 次元に (一般の有限次元にも) 適用できます。

(ただし n 次元 ($n \geq 3$) のとき、上の不等式の右辺の係数は $\sqrt{2}$ ではありませんが…)

一方、関数の極限については、右から近付くときの極限值として右極限值 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, 左から近付くときの極限值として左極限值 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ は習ったことがあるかと思いますが、飛び飛びもありと言われると、これだけでは不十分です。

(2)の条件がみたされるための条件は、実は(1)の数列を用いて表すことができ、 a に収束するどんな数列 a_n に対しても数列 $f(a_n)$ が α に収束する、すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \alpha$$

ということになります。このことが必要なのはすぐわかりますが、実はこれで十分であることも示せます。

そしてこれが $\mathbf{R}^n$ で考えるとなると、たとえ連続的であっても、360度あらゆる方向から近付けますし、渦を巻きながら近付くのもありな訳で、数列を点列に置き換えれば、(2')の条件を(1')を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{a}_n) = \alpha$$

と言い表すこともできます。

ただし、これは(2),(2')の議論の厳密なところを(1),(1')に押し付けただけで、根本的な解決にはなっていません。その所を厳密に言い表す方法が、微積分1でも少し出て来たかもしれませんが、厳密には数学要論Bで学ぶ、数列や点列では ϵ - N 論法、関数では ϵ - δ 論法と呼ばれるものです。

この資料では深入りはしませんが、紹介の意味で一応、それを用いて多変数の場合を記述しておくようになります。

(1') 任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して、 $n \geq N$ ならば $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| < \epsilon$ が成り立つ。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| < \epsilon$$

(2') 任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、 $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ ならば $|f(\mathbf{x}) - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ。

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - \alpha| < \epsilon$$

英文直訳なので、レ点の付いた漢文のように難解な感じがするかもしれませんが、もう少し日本語らしく読み下すと

(1') どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても、その ϵ の小ささに応じて、十分大きく自然数 N を選べば、 N 以上の自然数 n に対して a_n たち全てが a 中心で半径 ϵ の円(または球)の内部に含まれるほど近くにいるように (N を選ぶことが) できる。

(2') どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても、その ϵ の小ささに応じて、十分小さく $\delta > 0$ を選べば、 a 中心で半径 δ の円(または球)の内部に含まれる全ての $x \neq a$ に対して、 $f(x)$ が開区間 $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ に含まれるほど値が近いように (δ を選ぶことが) できる。

のようにやたら長くなってしまいます。

2年次の位相数学I,IIでは、この考え方をより抽象的な、距離空間、位相空間に一般化するのですが、それはまあ来年度の話で、とりあえず数学要論Bで、実数の概念と併せて、頑張って身に付けて下さい。

もっともこの資料では、この形で厳密に扱うことは一先ず置いておいて、この条件をみたすような次の形で対処することにしましょう。

(1') 正の実数 R と 1 変数の関数 $\epsilon(r)$ で

$$\epsilon(r) \geq 0 \quad (0 \leq r \leq R), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$$

をみたすものが存在して、

$$\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| \leq \epsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ。

(2') 正の実数 R と1変数の関数 $\epsilon(r)$ で

$$\epsilon(r) \geq 0 \quad (0 \leq r \leq R), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$$

をみたすものが存在して、

$$|f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \epsilon(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|) \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a})$$

が成り立つ。

これなら何とかかなりそうではないでしょうか？ 具体例は後でいろいろご紹介します。

さて、関数の場合、極限を考える際に x として a は外し、 α は a とは無関係に考えていましたが、ここでもし $\alpha = f(a)$ ならば、すなわち $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ならば、関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であると言おうと言うのは1変数の場合と同様で、これを
(2'+) 正の実数 R と1変数の関数 $\epsilon(r)$ で

$$\epsilon(r) \geq 0 \quad (0 \leq r \leq R), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$$

をみたすものが存在して、

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon(||x - a||)$$

が成り立つ。

ことで判定しようと言う訳です。

1 変数の場合同様、極限值は周囲からどう見えているか？ 関数の値は(周囲はどうでもよくて) ピンポイントでそこでの現実はどうか？ をそれぞれ表していて、連続であるとは、見た目と現実がぶれずに一致していることを表しています。ただし「周囲」と言うのが左右だけではなく、2 変数でも360度全方位からと広がっている訳です。

とりあえず一次関数、二次関数の例で見てみましょう。

まず $f(x, y) = ax + by$ から。

点 (x_0, y_0) における f の値は $f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0$ ですが、

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |(ax + by) - (ax_0 + by_0)| \\ &= |a(x - x_0) + b(y - y_0)| \\ &\leq |a||x - x_0| + |b||y - y_0| \\ &\leq (|a| + |b|)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= (|a| + |b|)||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| \\ &\rightarrow 0 \quad (||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

より、この $f(x, y)$ は $(x, y) = (x_0, y_0)$ で連続です。ここでは、

$$\epsilon(r) = (|a| + |b|)r$$

ととりました。 (x_0, y_0) は任意に選べるので、この一次関数 f は $\mathbf{R}^2$ 上の各点において連続ということになります。

次に $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ について。

点 (x_0, y_0) における f の値は $f(x_0, y_0) = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2$ です。今 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ とし、 r_0 より大きい正の実数 R を適当に一つ選びます。このとき、点 (x_0, y_0) を中心とし、半径 R の円内の任意の点 (x, y) は、原点を中心とし、半径 $R + r_0$ の円内にありますから、 $|x| < R + r_0 < 2R$, $|y| < R + r_0 < 2R$ をみたします。このことに注意すると、この (x, y) に対しては

$$\begin{aligned}
& |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\
&= |(ax^2 + 2bxy + cy^2) - (ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2)| \\
&= |a(x^2 - x_0^2) + 2b(xy - x_0y_0) + c(y^2 - y_0^2)| \\
&= |a(x^2 - x_0^2) + 2b(xy - x_0y) + 2b(x_0y - x_0y_0) + c(y^2 - y_0^2)| \\
&\leq |a||x^2 - x_0^2| + 2|b||xy - x_0y| + 2|b||x_0y - x_0y_0| + |c||y^2 - y_0^2| \\
&= (|a||x + x_0| + 2|b||y|)|x - x_0| + (2|b||x_0| + |c||y + y_0|)|y - y_0| \\
&\leq \{|a|(|x| + |x_0|) + 2|b||y|\}|x - x_0| + \{2|b||x_0| + |c|(|y| + |y_0|)\}|y - y_0| \\
&\leq \{|a|(2R + R) + 2|b| \cdot 2R\}|x - x_0| + \{2|b| \cdot R + |c|(2R + R)\}|y - y_0| \\
&= (3|a| + 4|b|)R|x - x_0| + (2|b| + 3|c|)R|y - y_0| \\
&\leq (3|a| + 6|b| + 3|c|)R||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| \\
&\rightarrow 0 \quad (||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

より、この $f(x, y)$ は $(x, y) = (x_0, y_0)$ で連続です。ここでは、

$$\epsilon(r) = (3|a| + 6|b| + 3|c|)Rr$$

ととりました。この $\epsilon(r)$ は (x_0, y_0) に依って取り替える必要はあるものの、 (x_0, y_0) 自身を任意に選んで、この論証が成立するので、この二次関数 f は $\mathbf{R}^2$ 上の各点において連続と言うことになります。

実は極限は、和、差、積、(分母の極限が 0 でない)商を、別々に求めてから演算を施してもよかったので、連続な関数の和、差、積、(分母が 0 でない)商は、やはり連続になります。このことと、一次の単項式 x, y (或いは $x_1, x_2, \dots, x_n$) で表される関数が連続であることを組み合わせれば、任意の多項式関数は各点で連続、任意の有理関数も定義域の(つまり分母が 0 でないような)各点で連続であることが導かれます。

(もっとも、積の連続性を証明するには、実は上記の二次関数の連続性の証明のようなことを議論する必要があります。)

さらに 1 変数の初等関数と多変数の多項式の合成関数も連続になります。

定義域の各点で連続な関数を、単に**連続関数**であると言うのも、1 変数の場合と同様です。

一方、1変数関数の場合、グラフが階段状になっているような関数は、その階段の段差があるところで、連続ではありませんでした。代表的な例はガウスの括弧と呼ばれる次の関数でしょう。

$$f(x) = [x] = n \quad (n \leq x < n+1)(\forall n \in \mathbf{Z})$$

x を超えない最大の整数と言った方が早いかもしれません。

多変数関数でも同様の関数は考えられます。例えば、 $f(x, y) = [x]$ とおけば、そのグラフは本物のいわゆる階段になります。 $f(x, y) = [ax + by]$ とおけば、階段の向きが変わります。ただし、これらは本質的に1変数と変わらず、そのグラフも1変数関数のグラフの(横倒しの)柱面になっています。

それでは多変数でこその例としては、どのようなものが考えられるでしょうか？ ここで、原点以外で定義された有理関数

$$f(x, y) = \frac{xyh(x, y)}{g(x, y)}$$

(ただし $g(x, y) = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ に限る) を考えてみましょう。これは原点では一般に定義されませんが、 x 軸上、 y 軸上共に恒等的に 0 なので、人工的に

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xyh(x, y)}{g(x, y)} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

と定義して $\mathbf{R}^2$ 上に拡張してみましょう。

例えば $g(x, y) = x^2 + y^2$, $h(x, y) = x$

(すなわち $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$)) のとき、

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y) - 0| = |f(x, y)|$$

$$= \frac{|x^2|}{|x^2 + y^2|} |y|$$

$$\leq 1 \cdot |y|$$

$$\leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow 0 \quad (||\boldsymbol{x} - \mathbf{0}|| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0)$$

なので、この $f(x, y)$ は原点でも連続です。

ところが $g(x, y) = x^2 + y^2$, $h(x, y) = 1$
(すなわち $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$)) のときは、前出の縦
の平面 (pt, qt, z) ($(t, z) \in \mathbf{R}^2$) での切り口を考えて、 xy 平面上の
原点を通る直線 $(x, y) = (pt, qt)$ に沿って原点に近付けてみると、

$$f(pt, qt) = \frac{ptqt}{(pt)^2 + (qt)^2} = \frac{pq}{p^2 + q^2}$$

で、これは $pq = 0$ である両座標平面以外では $t \rightarrow 0$ としても
 $f(0, 0) = 0$ には収束してくれないので、近付き方に依らずと言う
条件に抵触し、この $f(x, y)$ は原点では不連続です。

また $g(x, y) = x^4 + y^2$, $h(x, y) = x$

(すなわち $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$))のときは、前出の縦の平面 (pt, qt, z) ($(t, z) \in \mathbf{R}^2$) での切り口を考えて、 xy 平面上の原点を通る直線 $(x, y) = (pt, qt)$ に沿って原点に近付けてみると、

$$f(pt, qt) = \frac{(pt)^2 qt}{(pt)^4 + (qt)^2} = \frac{p^2 qt}{p^4 t^2 + q^2}$$

で、これは $pq = 0$ である両座標平面以外でも $t \rightarrow 0$ とすると $f(0, 0) = 0$ に収束するので、一見、近付き方に依らず、この $f(x, y)$ は原点では連続に見えます。

しかし、実は、 xy 平面上の原点を通る放物線 $(x, y) = (pt, qt^2)$ に沿って原点に近付けてみると、

$$f(pt, qt^2) = \frac{(pt)^2 qt^2}{(pt)^4 + (qt^2)^2} = \frac{p^2 q}{p^4 + q^2}$$

で、これは $pq \neq 0$ のとき $t \rightarrow 0$ としても $f(0, 0) = 0$ には収束してくれないので、近付き方に依らずと言う条件に抵触し、この $f(x, y)$ は原点では不連続です。

この例は、直線的な近付き方だけ確かめても不十分であると言う厄介な状況があることを教えてくれます。

これらの不連続になる例は、グラフの形状が階段上になっているのではなく、グラフの曲面を連続的につなげようとする、そこで曲面が縦の線分(より一般には縦の直線の一部)を含んでしまっているような状況になっています。

関数と言う以上、各 (x, y) に対し、 $f(x, y)$ としてただ一つの値しか与えられないので、このような曲面は関数のグラフにはなり得ないと見ることもできます。

[練習課題] $g(x, y) = x^4 + y^2$, $h(x, y) = x^2$ のときはどうか、調べてみましょう。

第1章で、2変数関数まではグラフが描けると書きましたが、描けるといっても実際には2次元の紙や画面に映して見ることになるので、形がちょっと複雑になって来ると、わかりにくくなってしまうことが少なくありません。

そこで代わりによく用いられるのが等高線を描くことです。これは数学ではなく地理で習ったのではないかと思います。簡単に復習しておくと、等高線とは、 $\mathbf{R}^2 \supset D$ 上の関数 $f(x, y)$ に対し、特定の値 c をとる点全体の集合 $f(x, y) = c$ のことで、 $f(x, y)$ がよい性質(次章以降で学ぶ微分可能性)を持つとき、一般には $\mathbf{R}^2$ 上の曲線になります。

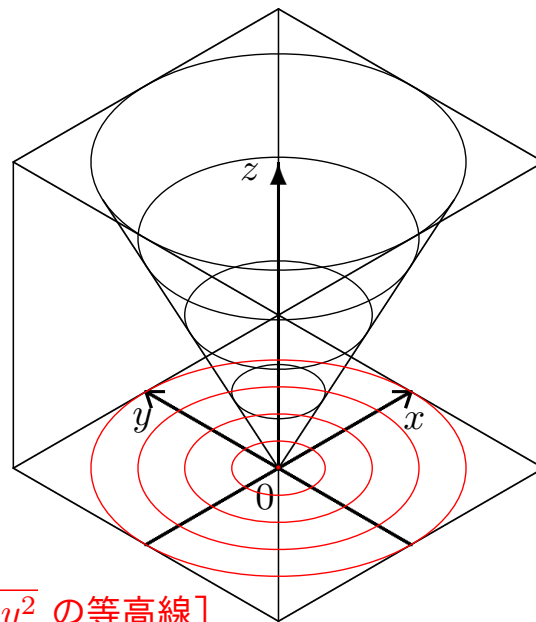
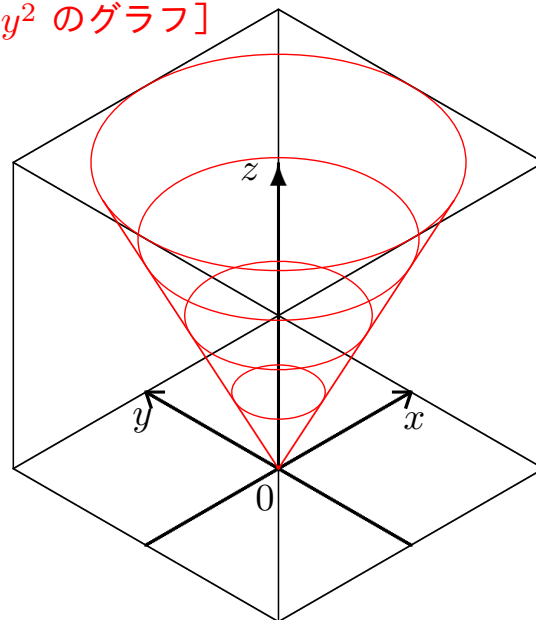
地図では $f(x, y)$ として、各地点に対してその標高を対応させる関数を考えます。また天気図では、 $f(x, y)$ として、気圧を対応させるので、**等圧線**と呼びます。

これを1本だけ描いても仕方が無いし、かと言って、全て描くと画面全体を塗りつぶしてしまうだけなので、昔から地図でよく用いられているのは、値 c として等差数列 c_n をとり、複数の等高線 $f(x, y) = c_n$ を同時に描いて、そこから元の地形を思い浮かべる助けとするという方法です。

次の図は、関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のグラフと等高線の間係を表したものです。

グラフが見やすいように多少縦に伸ばして描いているので $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ くらいだと思っても構いません。

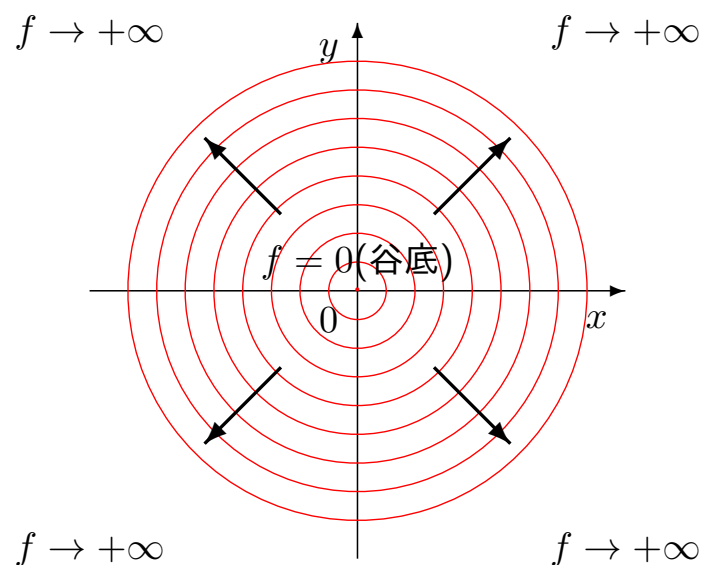
$[f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}]$ のグラフ]



$[f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}]$ の等高線]

これを平らに描けば次のような感じで、 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の地図が出来ます。でも赤い線だけではただの同心円で、地形は思い浮かべられません。実際の地図では、それぞれの等高線がどの高さを表しているかわかるよう数字を入れたり、切りのよい高さの等高線を太線で描いたりしますが、ここではその代わりに、上り方向に矢印を入れました。

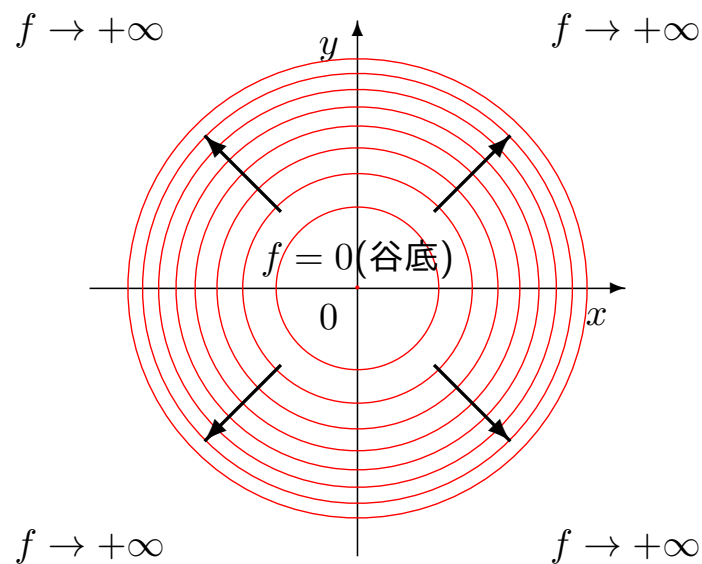
[$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の等高線]



次の図は $f(x, y) = x^2 + y^2$ の地図です。グラフが回転面なので、やはり同心円が並びますが、 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ とは、等高線どうしの間隔が違います。**間隔が空いているところは、高さが急に変わらない、つまり、傾きの小さいゆるやかな斜面**であることを意味し、**間隔が詰まっているところは、逆に高さが急に変わる、つまり、傾きの大きい急斜面**であることを意味しています。

このような情報を元に、元のグラフの形を思い浮かべるわけです。

$[f(x, y) = x^2 + y^2$ の等高線]



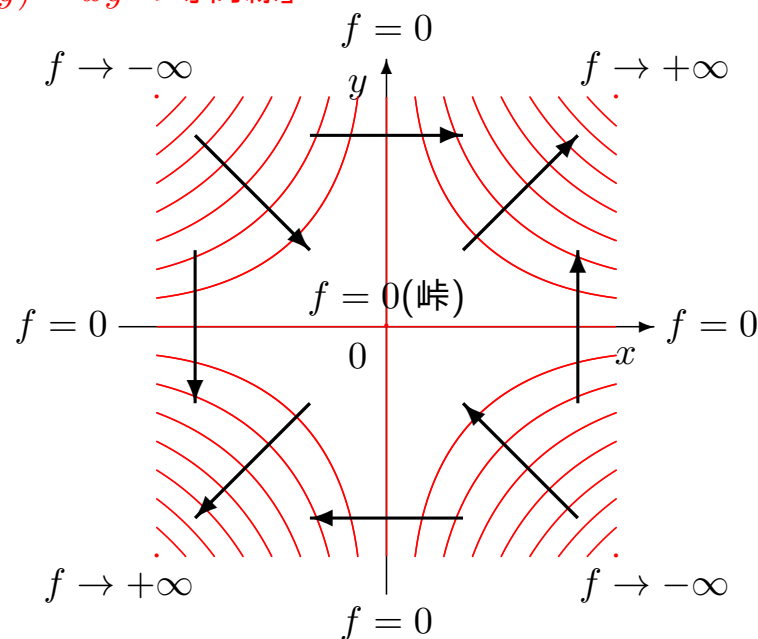
同心円の中心である原点は、言わば谷底ですが、関数にとっては極小値をとる点です。先に等高線は一般には曲線になると書きましたが、このように極値をとるような特別な点では、曲線にはならなかったりします。

(後の例でも出て来るように、極値をとる点が孤立せず、尾根や谷が同じ高さで続いているような場合は、この限りではありません。)

また、地形で言うと峠になっている所では、複数の等高線が互いに交わったりします。そのような点も、実は極値をとる点同様、微分が消えている特別な点であるということが、後に出て来ます。

次の図は $f(x, y) = xy$ の地図で、原点で高さ 0 の等高線が交わっています。グラフで言うと双曲放物面の鞍点になります。

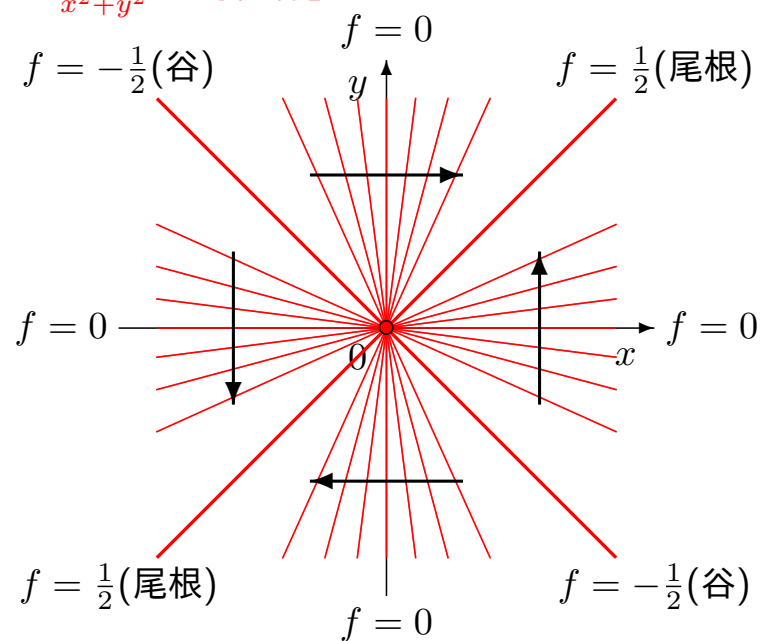
[$f(x, y) = xy$ の等高線]



しかしいずれにせよ、互いに交わっているのは、あくまで同じ高さの等高線どうしであって、違う高さの等高線が、接したり交わったりと言うことは、通常的地形では起こりません。

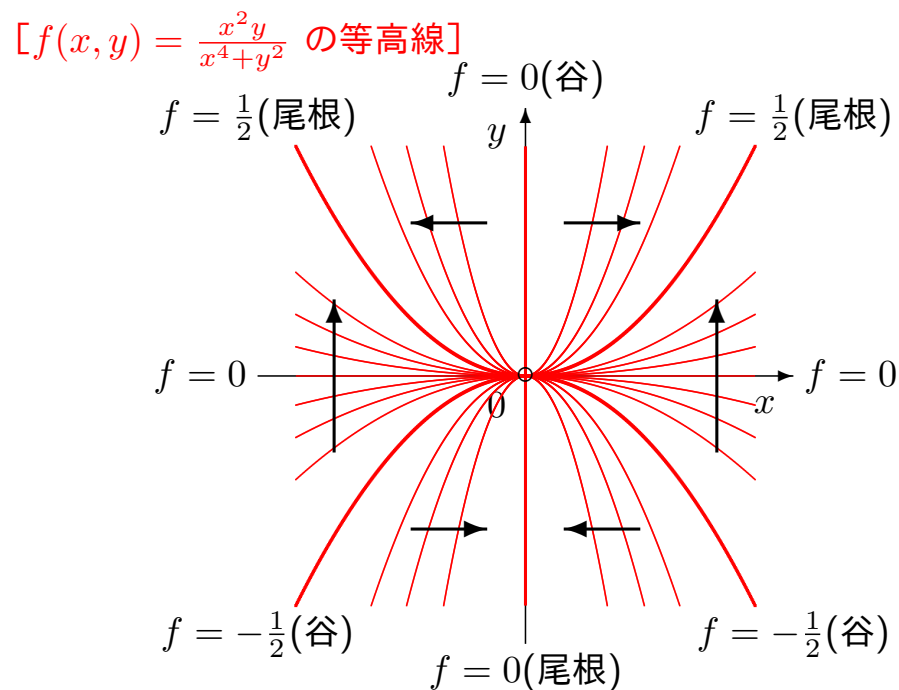
さて、本章では、原点で極限値を持たない有理関数の例をいくつかご紹介しました。その中の一つ $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ の地図はどのようなかと言うと、次の通りです。高さの異なる等高線たちが皆、原点に集中しています。原点では高さが決まらないので、最早関数のグラフとは言えませんが、あえてグラフの曲面を延長しようとするれば、そこに縦の線分を付け加えることになります。

$[f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ の等高線]



尾根と谷の間だけ見れば、螺旋階段の中心に近いイメージで
 しょうか？ このような点が一点でなく続くと崖です。

ちなみに、 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ の地図は次の通りです。



練習課題の解答

§3

相加平均と相乗平均の関係より

$$|2bpq| = 2|b|\sqrt{p^2q^2} \leq 2|b|\frac{p^2 + q^2}{2} = |b|(p^2 + q^2) = |b|$$

なので

$$-|b| \leq 2bpq \leq |b|$$

で、等号成立は $p^2 = q^2$ すなわち $q = \pm p$ のときですから、切り口の放物線の曲がり具合(凹凸)が最も極端なのは、座標平面と45度の角をなす縦の平面で切った場合ということになります。

この場合ももちろん、 $2bpq = 2b \cos \theta \sin \theta$ の増減を調べても構いません。

§4

$g(x, y) = x^4 + y^2$, $h(x, y) = x$ のとき、 $f(x, y)$ は原点で不連続でしたが、相加平均と相乗平均の関係より

$$|f(x, y)| = \frac{|x^2 y|}{|x^4 + y^2|} = \frac{x^2 |y|}{x^4 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^4 y^2}}{\frac{x^4 + y^2}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

が成り立ちます。(つまり関数 $f(x, y)$ は有界でした。) この不等式を用いると、 $g(x, y) = x^4 + y^2$, $h(x, y) = x^2$ のときは、

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= |f(x, y) - 0| = |f(x, y)| \\ &= \frac{x^2 |y|}{x^4 + y^2} |x| \leq \frac{1}{2} |x| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\rightarrow 0 \quad (\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

なので、この $f(x, y)$ は原点でも連続です。