数学基礎演習2・参考資料

$\boxed{5}$

(2023年11月16日(木)配信分)

自由課題

$\boxed{\text{提出方法}}$

０．この課題は自由課題で、提出は任意ですが、最低目標の２題以上教室で発表し、発表後ファイルを提出した人に限り、成績判定の参考とします。提出する場合は…

１．全ての問題に解答して下さい。

２．解答を所定の解答用紙(この問題と同じページにあるWordファイル) に記入して下さい。

３．解答用紙のファイル名は

sk223rep1(学籍番号).docx

として、Moodleに提出して下さい。

４．提出締切は11月30日(木)午後 3時です。

記入上の注意

１．学籍番号と氏名を忘れずに記入して下さい。

２．解答は所定の解答欄に記入し、正誤欄、備考欄には何も記入しないで下さい。

３．数式の記入に当たっては次のことに注意して下さい。

(1) べき乗などの上付き文字は、上付きにしなくても、「 ^ 」を用いて、次のように入力すれば十分です。

例： x^2 ⋯ x^2,　　　x^{12} ⋯ x^{12}

(2) 下付き文字は、下付きにしなくても、「 _ 」を用いて、次のように入力すれば十分です。

例： x_2 ⋯ x_2,　　　x_{12} ⋯ x_{12}

　これらは数式を含んだ文書作成に便利なTex のコマンドです。と言っても、他の数式を Tex のコマンドで書く必要はありません。

(3) 分数は $\frac{1}{2}$ でなくても、$1/2$ と入力して構いません。ただし必要に応じて括弧は忘れずに。

例： $1+\frac{1}{2}$ ⋯ 1+(1/2)

４．Word での入力では、次の点に注意が必要なようです。

(1) 英字で入力するとき、一文字目を小文字で入力しても大文字に変換されてしまう(ことがある)ので、その場合は、一度入力してから一文字目を小文字に入力しなおして下さい。

(2) 丸括弧「 (」で式を始めると、角括弧「] 」で閉じても丸括弧「) 」に変換されてしまう(ことがある)ので、その場合は、一旦「)] 」と入力してから「) 」を削除して下さい。

(注：３、４の内、全ての注意が今回必要とは限りません。)

$\boxed{\text{問題}}$ （$\boxed{}$に当てはまる数または式を解答して下さい。）

m, n, k, ℓ は自然数で、$m+k,\ n+\ell$ は共に偶数とする。$\mathbf{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^{m+k} + y^{n+\ell}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定義する。次の各問に答えよ。

(1) $mn \leq k\ell$ のとき、f は $(x,y)=(0,0)$ で連続でないことを示せ。

(解)

a は実数、p は正の実数とし、$(x,y)=(0,0)$ を通る曲線 $y=ax^p$ を考える。

$x \neq 0$ に対し

$$f(x,ax^p)=\frac{a^{\boxed{\text{ア}}}}{x^{\boxed{\text{イ}}}+a^{\boxed{\text{ウ}}}x^{\boxed{\text{エ}}}}$$

ここで$p=\boxed{\text{オ}}$ ととれば、

$$f(x,ax^{\boxed{\text{オ}}})=\frac{a^{\boxed{\text{ア}}}}{1+a^{\boxed{\text{ウ}}}x^{\boxed{\text{カ}}}}$$

今、仮定$mn \leq k\ell$ より$\boxed{\text{カ}} \geq 0$ である。

$mn < k\ell$ のとき $\boxed{\text{カ}} > 0$ より

$$\lim_{x \to 0} f(x, ax^{\boxed{\text{オ}}}) = \frac{a^{\boxed{\text{ア}}}}{1 + a^{\boxed{\text{ウ}}} \cdot \boxed{\text{キ}}}$$

一方 $mn = k\ell$ のとき $\boxed{\text{カ}} = 0$ より

$$\lim_{x \to 0} f(x, ax^{\boxed{\text{オ}}}) = \frac{a^{\boxed{\text{ア}}}}{1 + a^{\boxed{\text{ウ}}} \cdot \boxed{\text{ク}}}$$

で、いずれの場合も a の値により、すなわち (x, y) の $(0, 0)$ への近付き方により、$f(x, y)$ は異なる値に収束する。

従って、極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ が存在しないので、$f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で連続でない。

(2) $k\ell < mn$ のとき、f は $(x, y) = (0, 0)$ で連続であることを示せ。

(解)

任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対し、不等式

$$X^{\alpha}Y^{1-\alpha} \leq X + Y \quad (X \geq 0, Y \geq 0)$$

が成り立つ。(ここでは証明抜きで用いるが、証明は難しくない。)

仮定より $m+k$, $n+\ell$ は共に偶数であることと上の不等式より

$$\begin{aligned} x^{m+k} + y^{n+\ell} &= |x|^{m+k} + |y|^{n+\ell} \\ &\geq (|x|^{m+k})^{\boxed{\text{ケ}}}(|y|^{n+\ell})^{\boxed{\text{コ}}} \\ &= |x|^{m}|y|^{\boxed{\text{サ}}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

今、仮定より $\boxed{シ} > 0$ なので、任意の (x, y) に対して

$$
\begin{aligned}
|x^m y^n| &= |x|^m |y|^n \\
&= |x|^m |y|^{\boxed{サ}} |y|^{\boxed{シ}} \\
&\leq (x^{m+k} + y^{n+\ell}) |y|^{\boxed{シ}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって、任意の $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|f(x, y)| &= \left| \frac{x^m y^n}{x^{m+k} + y^{n+\ell}} \right| \\
&\leq |y|^{\boxed{シ}} \\
&\leq r^{\boxed{シ}}
\end{aligned}
$$

を得る。但し、ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。

$\boxed{\text{シ}} > 0$ より、$r \to 0$ のとき、$r^{\boxed{\text{シ}}}$ は 0 に収束するので、上の不等式より $f(x, y)$ もまた0 に収束する。

従って、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ が成り立つので、$f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で連続である。