数学基礎演習2・演習問題

—A.1—

[数学要論B]

問 A.1.1(a), A.1.2(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

$\boxed{\text{数列の極限(} \epsilon\text{-}N \text{ 論法による)}}$

問**A.1.1**(a-c)　実数列 $\{a_n\}$ は $n \to +\infty$ のとき極限値 α に収束するとする。このとき、次を示せ。

(a)　$a_n \neq 0 \ (\forall n \in \mathbf{N})$ かつ $\alpha \neq 0$ のとき、実数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は収束して、その極限値は $\dfrac{1}{\alpha}$ である。

(b)　$a_n > 0 \ (\forall n \in \mathbf{N})$ のとき、実数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ は収束して、その極限値は $\sqrt{\alpha}$ である。

(c)　実数列 $\{{a_n}^3\}$ は収束して、その極限値は α^3 である。

注意：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n b_n$ の公式を用いた解答は不可。

問A.1.2(a-b)　二つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ から、新しい実数列 $\{c_n\}$ を、次式により与えることにする。$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が共に収束するとき、$\{c_n\}$ は収束するか否か判定せよ。（収束すると思うなら証明し、収束しないと思うならその例を挙げよ。）

(a)　$c_n = \max\{a_n, b_n\}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$

(b)　$c_n = |a_n - b_n|$ $(\forall n \in \mathbf{N})$

問A.1.3　$0 < a_0 \leq b_0$ とする。

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2 \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

により与えられる実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共に収束して、その極限値は一致することを示せ。

問A.1.4　三つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において、

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立つとする。いま $\{c_n\}$ が収束するならば、

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n$$

が成り立つことを示せ。また $\{c_n\}$ が収束しないとき、この不等式が成り立たないような例を一つ挙げよ。

問A.1.5　有界な実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について、次のことを示せ。

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n$$

$\boxed{\text{解答例}}$

問**A.1.1**(a)　まず、十分大きなすべての$n \in \mathbf{N}$に対し、

$$|a_n| \geq \frac{|\alpha|}{2}$$

となることを示す。

実数列 $\{a_n\}$ が α に収束するので、

$$^\forall\epsilon > 0, {}^\exists N_1(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N_1(\epsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

上の式で ϵ は任意なので$\epsilon = \dfrac{|\alpha|}{2}(> 0)$ とすると、任意の $n \geq N_1\left(\dfrac{|\alpha|}{2}\right)$ に対し、

$$|a_n| \geq ||\alpha| - |a_n - \alpha|| \geq |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} = \frac{|\alpha|}{2}$$

よって、$n \geq N_1\left(\dfrac{|\alpha|}{2}\right)$ のとき、

$$|a_n| \geq \frac{|\alpha|}{2}$$

が成り立つ。

また、実数列 $\{a_n\}$ が α に収束するので、

$$^{\forall}\epsilon > 0, {}^{\exists}N_2(\epsilon) = N_1\left(\frac{|\alpha|^2}{2}\epsilon\right) \in \mathbf{N} \text{ s.t.}$$

$$n \geq N_2(\epsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2}{2}\epsilon$$

$N = \max\left\{N_1\left(\dfrac{|\alpha|}{2}\right), N_2(\epsilon)\right\}$ とすると、任意の $n \geq N$ に対し、

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{|\alpha-a_n|}{|a_n||\alpha|}\leq\frac{|\alpha-a_n|}{\dfrac{|\alpha|}{2}|\alpha|}<\frac{\dfrac{|\alpha|^2}{2}\epsilon}{\dfrac{|\alpha|}{2}|\alpha|}=\epsilon$$

よって、実数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$は収束し、その極限値は$\dfrac{1}{\alpha}$である。

問**A.1.2**(a)　$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$ とする。

(i)　$\alpha < \beta$ のとき $0 < \epsilon' < \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ となるような任意の ϵ' をとると、$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$ なので、

$$^{\exists}N_1 \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon',$$
$$^{\exists}N_2 \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \epsilon'$$

が成り立つ。このとき、$N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと任意の $n \geq N_3$ に対し、

$$a_n < \alpha + \epsilon' < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < \beta - \epsilon' < b_n$$

なので、$c_n = \max\{a_n, b_n\} = b_n$ である。

任意に $\epsilon > 0$ をとると、$\lim_{n \to +\infty} b_n = \beta$ なので、

$$^\exists N_4 \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N_4 \Rightarrow |b_n - \beta| < \epsilon$$

である。$N = \max\{N_3, N_4\}$ とおくと、任意の $n \geq N$ に対し、

$$|c_n - \max\{\alpha, \beta\}| = |b_n - \beta| < \epsilon$$

が成り立ち、$\lim_{n \to +\infty} c_n = \max\left\{\lim_{n \to +\infty} a_n, \lim_{n \to +\infty} b_n\right\}$ である。

(ii) $\alpha > \beta$ のとき、(i)と同様の議論により、

$\lim_{n \to +\infty} c_n = \max\left\{\lim_{n \to +\infty} a_n, \lim_{n \to +\infty} b_n\right\}$ が成り立つ。

(iii) $\alpha = \beta$ のとき $\lim_{n \to +\infty} a_n = \alpha, \lim_{n \to +\infty} b_n = \alpha$ なので、任意に $\epsilon > 0$ をとると、

$$^\exists N_1 \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon,$$
$$^\exists N_2 \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \alpha| < \epsilon$$

である。$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、任意の $n \geq N$ に対し、

$$\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon, \alpha - \epsilon < b_n < \alpha + \epsilon$$

が成り立つ。よって、$\alpha - \epsilon < \max\{a_n, b_n\} < \alpha + \epsilon$ が成り立つ。
以上より、任意の $n \geq N$ に対し、

$$|c_n - \max\{\alpha, \beta\}| = |\max\{a_n, b_n\} - \alpha| < \epsilon$$

が成り立ち、$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \max\left\{\lim_{n\to+\infty} a_n, \lim_{n\to+\infty} b_n\right\}$ である。

(i),(ii),(iii) より、実数列 $\{c_n\}$ は $\displaystyle\max\left\{\lim_{n\to+\infty} a_n, \lim_{n\to+\infty} b_n\right\}$ に収束する。