

数学基礎演習2・演習問題

—A.2—

[数学要論B]

問 A.2.3(a) 前半は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

実数の連続性、上限、下限

問 **A.2.1** 実数列 $\{a_n\}$ において、次の四条件は互いに同値であることを示せ。

(1) ある実数 K_1, K_2 が存在して、全ての自然数 n に対して $K_1 < a_n < K_2$ が成り立つ。

(2) ある実数 K_1, K_2 が存在して、全ての自然数 n に対して $K_1 \leq a_n \leq K_2$ が成り立つ。

(3) ある実数 K が存在して、全ての自然数 n に対して $|a_n| < K$ が成り立つ。

(4) ある実数 K が存在して、全ての自然数 n に対して $|a_n| \leq K$ が成り立つ。

注意：このことから、 $\{a_n\}$ が有界であることの定義として、どの条件を採用しても同じことだとわかる。

問 **A.2.2** $\{a_n\}, \{b_n\}$ は上に有界な実数列とし、
 $\sup\{a_n | n \in \mathbf{N}\} = \alpha, \sup\{b_n | n \in \mathbf{N}\} = \beta$ とする。
 $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) とおく。このとき、実数列 $\{c_n\}$ も上に有界で、 $\sup\{c_n | n \in \mathbf{N}\} = \max\{\alpha, \beta\}$ が成り立つことを示せ。

問 **A.2.3(a-f)** $\mathbf{R}$ の有界な部分集合 A, B について、次を示せ。

(a) $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ とするとき、

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

(b) k は正の定数、 $kA = \{ka | a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(kA) = k \sup A, \inf(kA) = k \inf A$$

(c) $-A = \{-a | a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(-A) = -\inf A, \inf(-A) = -\sup A$$

(d) $B = \{a - a' | a \in A, a' \in A\}$ とするとき、

$$\sup B = \sup A - \inf A$$

(e) $A^2 = \{a^2 | a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(A^2) = \max\{(\sup A)^2, (\inf A)^2\}$$

(f) $A^3 = \{a^3 | a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(A^3) = (\sup A)^3$$

注意： $\max A, \min A$ の存在は仮定していないので、解答にそれらを用いてはならない。

問 **A.2.4** $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \ (\forall n \in \mathbf{N})$ により与えられる開集合の列 $\{I_n\}$ について、 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \emptyset$ を示せ。

問 **A.2.5** 区間列 $\{I_n\}, \{J_n\}$ を次式により与えることにする。

$$I_n = \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \quad J_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n$ および $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n$ を求めよ。

注意：結果だけの解答は不可。

解答例

問A.2.3(a) 前半

$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ の証明

A, B は $\mathbf{R}$ の有界な部分集合なので、 $\sup A, \sup B$ が存在し、それぞれ、 $\sup A = s, \sup B = t$ とする。

このとき、 $\sup A = s$ より、次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 任意の $a \in A$ に対し、 $a \leq s$

(ii) 任意の $\epsilon_1 > 0$ に対し、 $s - \epsilon_1 < a(\epsilon_1)$ となる $a(\epsilon_1) \in A$ が少なくとも一つは存在する。

また、 $\sup B = t$ により、次の (iii), (iv) が成り立つ。

(iii) 任意の $b \in B$ に対し、 $b \leq t$

(iv) 任意の $\epsilon_2 > 0$ に対し、 $t - \epsilon_2 < b(\epsilon_2)$ となる $b(\epsilon_2) \in B$ が少なくとも一つは存在する。

このとき、任意に $c \in A + B$ をとると、 $A + B$ の定義より、 $c = a_c + b_c$ となる $a_c \in A, b_c \in B$ が存在する。(i), (iii) より、

$$a_c \leq s, \quad b_c \leq t$$

が成り立つので、

$$c = a_c + b_c \leq s + t$$

が成り立つ。

よって、 $s + t$ は集合 $A + B$ の上界の一つである。

任意に $\epsilon > 0$ をとる。(ii) で $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2} (> 0)$ とすると
 $s - \frac{\epsilon}{2} < a\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ となる $a\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \in A$ が少なくとも一つは存在するこ
とが分かる。

また、(iv) で $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2} (> 0)$ とすると $t - \frac{\epsilon}{2} < b\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ となる
 $b\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \in B$ が少なくとも一つは存在することが分かる。

このとき、この $a\left(\frac{\epsilon}{2}\right), b\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ に対し、

$$a\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + b\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \in A + B$$

かつ

$$(s + t) - \epsilon < a\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + b\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

が成り立つ。

以上により、 $\sup(A + B) = s + t$ である。よって、 $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ が成り立つ。