数学基礎演習2・演習問題

—A.3—

[数学要論B]

(訂正版)

問 A.3.1 は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

$\boxed{\text{関数の極限(} \epsilon\text{-}\delta \text{ 論法による)}}$

問A.3.1　$\mathbb{R}$ 全体で定義された関数 $f(x)$ に対し、ある a において極限値 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ が存在するとき、極限値 $\lim_{x \to a} f(x)^3$ も存在して、その値は α^3 であることを、極限値の定義に戻って示せ。

注意： $f(x)$ の連続性は仮定していない。また、$\lim_{x \to a} f(x)g(x)$, $\lim_{x \to a} g \circ f(x)$ 等の公式を用いた解答は認めない。

問A.3.2　R 全体で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ に対し、新しい関数 $h(x)$ を、

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

により与えることにする。ある a において極限値 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ が共に存在するとき、$\lim_{x\to a} h(x)$ も存在して、その値は $\max\{\alpha, \beta\}$ であることを、極限値の定義に戻って示せ。

注意： $f(x)$, $g(x)$ の連続性は仮定していない。

問A.3.3　$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ はいずれも、開区間 I 上の（連続とは限らない）関数とし、I の一点 a において、極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ が共に存在し、同じ値 α をとるものとする。

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad (\forall x \in I)$$

ならば、極限値 $\lim_{x\to a} h(x)$ も存在し、やはり同じ値 α をとることを、ϵ-δ 論法を用いて示せ。

問A.3.4　二つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ （いずれも連続とは限らない）について $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{u\to b} f(u) = c$ が成り立つとき、合成関数 $y = f \circ g(x) = f(g(x))$ についても $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$ が成り立つことを、ϵ-δ 論法を用いて示せ。

この問の主張は間違いである。反例を挙げよ。

問A.3.5　関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 全体で定義されているとする。$f(x)$ が有界ならば、任意の実数 a に対し $\lim_{x \to a}(x-a)f(x)$ が存在することを、極限値の定義に戻って示せ。

注意：$\lim_{x \to a} f(x)$ の存在は仮定していない。

問A.3.6　関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 全体で定義されているとする。$f(x)$ が有界ならば、$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ が存在することを、極限値の定義に戻って示せ。

注意：$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ の存在は仮定していない。

$\boxed{\text{関数の連続性(}\ \epsilon\text{-}\delta\ \text{論法による)}}$

問A.3.7　n は自然数とする。関数 $f(x) = x^n$ が $\mathbf{R}$ 上で連続であることを、ϵ-δ 論法を用いて示すとき、各点 $x \in \mathbf{R}$ と与えられた $\epsilon > 0$ に対し、$\delta > 0$ として具体的にどんな値をとればよいのか答えよ。

問A.3.8　$(0, +\infty)$ 上連続な関数 $f(x)$ に対し、

$$\lim_{x \to +\infty} \{f(x+1) - f(x)\} = \alpha$$

ならば、

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

が成り立つことを示せ。

問A.3.9　$\mathbf{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(\theta x+(1-\theta)y) \leq \theta f(x)+(1-\theta)f(y) \qquad (\forall x, \forall y \in \mathbf{R}, 0 < \forall\theta < 1)$$

を満たすとき、$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上連続であることを示せ。

注：このような $f(x)$ を凸関数と言う。

問A.3.10　$\mathbf{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(2x) = f(x) \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

を満たし、かつ $x = 0$ で連続ならば、$f(x)$ は定数であることを示せ。

問A.3.11　$\mathbf{R}$ 上連続な二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が、$\mathbf{Q}$ 上で一致するならば、$\mathbf{R}$ 上でも一致することを示せ。

ヒント： $\mathbf{Q}$ が $\mathbf{R}$ 内で稠密であること（任意の実数 x と任意の $\epsilon > 0$ に対し、x の ϵ-近傍 $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ が、x でない有理数を含むこと、つまり x のいくらでも近くに有理数が存在すること）をまず示しておけば、あとは連続性の定義からすぐ判る。

問A.3.12　$\mathbf{R}$ 上連続な関数 $f(x)$ に対し、

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\forall x, \forall y \in \mathbf{R})$$

ならば、ある実数 a により $f(x) = ax$ と書けることを示せ。

ヒント：問 A.3.11 の結果を用いてよい。

$\boxed{\text{中間値の定理}}$

問A.3.13　実係数の奇数次方程式

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0, n$ は奇数) が少なくとも一つ実数解を持つことを、中間値の定理を用いて示せ。

問A.3.14　実係数の n 次方程式

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ は、$a_0 a_n < 0$ のとき、少なくとも一つ実数解を持つことを示せ。

一様連続性

問A.3.15　$f(x)$ は R 上連続な関数で、かつ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ が共に有界な値として存在するとする。

(1)　$f(x)$ は R 上で有界であることを示せ。

(2)　$f(x)$ は R 上で一様連続であることを示せ。

問A.3.16　開区間で有界な連続関数で、一様連続でない例を挙げよ。

問A.3.17　関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ は $(0,+\infty)$ 上一様連続か否か判定せよ。

注意：結論だけの解答は不可。

解答例

問A.3.1

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ より、

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ s.t. } |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \epsilon \tag{1}$$

が成り立つ。

$$\forall\epsilon' > 0, \exists\delta' > 0 \text{ s.t. } |x-a| < \delta' \Longrightarrow |f(x)^3-\alpha^3| < \epsilon$$

を示す。

任意に $\epsilon' > 0$ をとる。

$$\epsilon' = \epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon$$

となる $\epsilon > 0$ をとる。

ここで、$g(\epsilon) = \epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon$ とすると、

$$g'(\epsilon) = 3\epsilon^2 + 6|\alpha|\epsilon + 3|\alpha|^2 = 3(\epsilon + |\alpha|)^2 > 0 \quad (\epsilon > 0)$$

である。また、 $g(0) = 0$ であることから、(少なくとも十分小さい $\epsilon' > 0$ に対しては) $\epsilon' = \epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon$ となる $\epsilon > 0$ は存在する。($(*1)$ 参照。)

この ϵ に対して、(1) の δ をとる。$\delta' = \delta$ とする。$|x-a| < \delta'$ とすると、$|f(x)-\alpha| < \epsilon$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
|f(x)^3 - \alpha^3| &= |(f(x)-\alpha)^3 - 3\alpha f(x)(f(x)-\alpha)| \\
&\leq |f(x)-\alpha|^3 + 3|\alpha||f(x)||f(x)-\alpha| \\
&< \epsilon^3 + 3|\alpha|(|\alpha|+\epsilon)\epsilon \\
&= \epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon \\
&= \epsilon' \qquad (*2)
\end{aligned}
$$

$(*1)$ 実際には、任意の $\epsilon' > 0$ に対して、条件を満たす $\epsilon > 0$ がとれますが、もう一言説明が必要です。もっとも、十分に小さくはない $\epsilon' > 0$ に対しては、十分小さい別の $\epsilon' > 0$ に対する $\epsilon > 0$ をとれば、$(*2)$ で等号は成り立たないものの、不等式

$$\begin{aligned}\epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon &= \text{十分小さい別の } \epsilon' \\ &< \text{十分に小さくはない } \epsilon'\end{aligned}$$

が成り立ち、ここではそれで十分です。

　なお、内容的には微分より前の段階なので、微分を用いない $\epsilon > 0$ のとり方の例も紹介しておきます。

　$\alpha = 0$ のときは、$\epsilon = \sqrt[3]{\epsilon'}$ ととれば、$\epsilon > 0$ かつ

$$\epsilon' = \epsilon^3 = \epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon$$

が成り立ちます。

$\alpha \neq 0$ のときは、

$$\epsilon = \min\left\{\frac{1}{7|\alpha|^2}\epsilon', |\alpha|\right\}$$

とおくと、$\epsilon' \leq 7|\alpha|^3$ のとき、$\epsilon = \dfrac{1}{7|\alpha|^2}\epsilon' \leq |\alpha|$ より、

$$\epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon \leq 7|\alpha|^2\epsilon \leq \epsilon'$$

一方 $\epsilon' \geq 7|\alpha|^3$ のとき、$\epsilon = |\alpha| \leq \dfrac{1}{7|\alpha|^2}\epsilon'$ より、

$$\epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon \leq 7|\alpha|^3 \leq \epsilon'$$

で、いずれの場合にも、不等式

$$\epsilon^3 + 3|\alpha|\epsilon^2 + 3|\alpha|^2\epsilon \leq \epsilon'$$

が得られます。