

数学基礎演習2・演習問題

—A.4—

[数学要論B]

問 A.4.1 は(TAによる)解答例付きですが、本質的に異なる例についての解答ならば、発表しても構いません。

関数の微分(ϵ - δ 論法による)

問 A.4.1 多項式(単項式、定数も含む)以外の $\mathbb{R}$ 上微分可能な関数の一つを選び、微分可能であることを定義に戻って示せ。

問 A.4.2 $\mathbb{R}$ 上連続ではあるが(少なくともどこか一点で)微分不可能な関数の例の一つを与え、微分不可能であることを定義に戻って示せ。

問A.4.3 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数、 a は実数とする。 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、

$$(*) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = f'(a)$$

が成り立つことを示せ。また、 $(*)$ 左辺の極限值は存在するが、 $x = a$ で微分可能でない $f(x)$ の例を一つ挙げよ。

注意： $x \neq a$ での微分可能性は仮定していない。

平均値の定理

問 A.4.4 閉区間 $[a, b]$ ($a < b$) を一つ選び、その $[a, b]$ 上で連続かつ开区間 (a, b) 上微分可能な関数で、定数でも一次関数でもないものを一つ選んで、その関数について平均値の定理の主張を述べよ。さらに、その主張を実現する (a, b) 上の点を具体的に与えよ。

問 A.4.5 関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上微分可能で、さらにその導関数 $f'(x)$ が $\mathbb{R}$ 上有界のとき、 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ。

問 A.4.6 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ と実数 a に対し、問 A.4.3 の $(*)$ 左辺の極限值が存在し、さらに $f(x)$ が a を含むある开区間 I 上 Lipschitz 連続

(すなわち、「 $\exists L > 0, \forall x, \forall x' \in I; |f(x) - f(x')| < L|x - x'|$ 」) ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であることを示せ。

高階微分

問 A.4.7 n は自然数とする。

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおく。 $n = 2$ のとき、関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるが、 C^1 級ではないことを示せ。さらに、 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上 C^1 級となる n の範囲、および $\mathbb{R}$ 上 2 階微分可能となる n の範囲を求めよ。

解答例

問A.4.1 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ が微分可能であることを示す。つまり、

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t.}$$

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| < \epsilon$$

を示す。

任意に $x \in \mathbf{R}$, $\epsilon > 0$ をとる。

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{1}{|2x| + |3x^2 - 1|} \right\}$$

とする。 $0 < |h| < \delta$ とする。

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| \\
&= \left| \frac{1+x^2 - (1+(x+h)^2)}{h(1+(x+h)^2)(1+x^2)} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| \\
&= \left| \frac{-2x-h}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left| \frac{2xh^2 + (3x^2-1)h}{1+(x+h)^2} \right| \\
&\leq |2xh^2 + (3x^2-1)h| \\
&\leq (|2x||h| + |3x^2-1|)|h| \\
&\leq (|2x| + |3x^2-1|)|h| \quad (|h| < 1 \text{ より}) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$