

数学基礎演習2・演習問題

—A.5—

[数学要論B]

問 A.5.5(b), A.5.5(e), A.5.8(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

問 A.5.10 は(TAによる)解答例付きですが、本質的に異なる例についての解答ならば、発表しても構いません。

無限数列の級数 (ϵ - N 論法による)

問 **A.5.1** $p > 0$ とする。級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ は、 $p \neq 1$ のとき発散し、 $p > 1$ のとき収束することを示せ。

問 **A.5.2** 正項級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が収束するとき、 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ も収束することを示せ。

問 **A.5.3** 1 が 1 個、 $-\frac{1}{2}$ が 2 個、 $\frac{1}{4}$ が 4 個、 $-\frac{1}{8}$ が 8 個、
.....、 $\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ が 2^k 個、.....、を並べ替えて出来る数列の級数の和を考える。

- (1) 和がちょうど 2 になるように並べよ。
- (2) 和がちょうど $\frac{1}{3}$ になるように並べよ。或いは、そのような並べ方が存在することを示せ。

問 **A.5.4** $\{a_n\}$ は実数列とする。

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\} \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

とおく。

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$$

のとき、任意の実数 p に対し、 $\{a_n\}$ を適当に並べ替えてできる実数列 $\{b_n\}$ で、その級数の和について $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = p$ が成り立つものが存在することを示せ。

関数列の各点収束、一様収束 (ϵ - N 論法による)

問 **A.5.5(a-f)** 次の関数列 $\{f_n\}$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき I 上各点収束することを示せ。また、この収束は一様収束であるか否か答え、その理由を説明せよ。

$$(a) \quad f_n(x) = (1 - x^n)^{1/n} \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad I = [0, 1]$$

$$(b) \quad f_n(x) = \frac{n}{(n+1)x} \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad I = (0, +\infty)$$

$$(c) \quad f_n(x) = \sin \frac{1}{nx} \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad I = (0, +\infty)$$

$$(d) \quad f_n(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{nx} \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad I = (0, +\infty)$$

$$(e) \quad f_n(x) = \frac{[nx]}{n} \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad I = [0, +\infty)$$

$$(f) \quad f_n(x) = n \left[\frac{x}{n} \right] \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad I = [0, +\infty)$$

ただし $[x] = “x$ を超えない最大の整数” とする。

問 **A.5.6** 関数列 $\{f_n\}$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき関数 f に区間 I 上一様収束するとする。各 f_n がいずれも I 上有界ならば、 f もまた I 上有界であることを示せ。

注意：「 $|f_n| \leq \exists K$ より $|f| \leq K$ 」という解答は不可。

問 **A.5.7** f は $\mathbf{R}$ 上の連続関数とし、

$$f_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right) \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

とする。 f が $\mathbf{R}$ 上一様連続ならば、関数列 $\{f_n\}$ は f に $\mathbf{R}$ 上一様収束することを示せ。また f が $\mathbf{R}$ 上一様連続でなく、 $\{f_n\}$ が f に $\mathbf{R}$ 上一様収束しない例を一つ挙げよ。

整級数

問 **A.5.8**(a-b) 整級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とする。

- (a) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n| < +\infty$ ならば $R \geq 1$ が成り立つことを示せ。
- (b) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} |a_n| > 0$ ならば $R \leq 1$ が成り立つことを示せ。

問 **A.5.9** p は実数とする。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^p - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ p & (x = 1) \end{cases}$$

とおく。関数 $f(x)$ は $x = 1$ で何階微分可能か調べよ。

ヒント：この問題がなぜここで出題されたのか考えよ。

問 **A.5.10** $R > 0$ とする。次の六つの区間について、これを収束域とする整級数の例をそれぞれ一つずつ挙げよ。

$$\begin{aligned} \{0\} &= [0, 0], & (-R, R), & & (-R, R], \\ & & [-R, R), & & [-R, R], & \mathbf{R} = (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

問 **A.5.11** 整級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とする。項別微分した級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ も同じ収束半径 R を持つことを示せ。さらに $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ は収束するが、 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n R^{n-1}$ は発散するような例を一つ挙げよ。

解答例

問 **A.5.5(b)** 任意に $\epsilon > 0, x \in I$ をとると、アルキメデスの原理により、

$$\frac{1}{\epsilon} \leq (N + 1)x$$

となる $N \in \mathbf{N}$ が存在する。

$f(x) = \frac{1}{x}$ とすると、この N に対し、 $n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) \frac{1}{x} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)x} \\ &\leq \frac{1}{(N+1)x} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

よって $\{f_n\}$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき I 上 $f(x)$ に各点収束する。

ここで、 $\epsilon = \frac{1}{2}$ とし、任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し、 $x = \frac{1}{n+1}$ とすると、

$$|f_n(x) - f(x)| = |n - (n+1)| = 1 \geq \epsilon$$

よって、 $\{f_n\}$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき I 上一様収束でない。

問 **A.5.5(e)** 次の関数列 $\{f_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき x に I 上各点収束 (かつ一様収束) することを示す。

$$f_n(x) = \frac{[nx]}{n} \quad (\forall n \in \mathbf{N}), \quad I = [0, +\infty).$$

つまり、

$$\forall x \in [0, \infty), \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - x| < \epsilon$$

を示す。

任意に $x \in [0, \infty)$, $\epsilon > 0$ をとる。 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$ とし、 $n \geq N$ とする。
($\left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil \leq \frac{1}{\epsilon} < \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1 = N$ より)

$$\begin{aligned} |f_n(x) - x| &= \left| \frac{[nx]}{n} - x \right| \\ &= \frac{1}{n} |[nx] - nx| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N} < \epsilon. \end{aligned}$$

(x に依らない N がとれているので、この収束は一様収束である。)

問 **A.5.8(a)** $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \alpha$ とすると、仮定より $0 \leq \alpha < +\infty$ である。

このとき、上極限の定義により、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k \geq n} |a_k| \right) = \alpha$$

である。極限の定義により、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} \quad s.t. \quad n \geq N \Rightarrow \left| \sup_{k \geq n} |a_k| - \alpha \right| < \epsilon$$

である。よって、 $n \geq N$ のとき、 $\sup_{k \geq n} |a_k| - \alpha < \epsilon$ すなわち、
 $n \geq N \Rightarrow |a_n| < \alpha + \epsilon$ が成り立つ。

ここで、 $\alpha + \epsilon < M$ となる $M > 0$ が存在する。

このとき、 $n \geq N \Rightarrow |a_n| < M$ が成り立ち、

$n \geq N \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} < M^{\frac{1}{n}}$ が成り立つ。

このとき、 $n \geq N \Rightarrow (0 \leq) \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \leq M^{\frac{1}{n}}$ で、各辺極限をとると

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M^{\frac{1}{n}} = 1$$

よって $0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ である。

この不等式と、コーシー・アダマールの公式

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

（ただし、上の式で $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ とする）により、 $R \geq 1$ が
成り立つ。

問 A.5.10

(1) $\{0\} = [0, 0]$ を収束域とする整級数 (の一例) は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$$

である。

$x = 0$ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n = 0$ である。

$x \neq 0$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| \quad (*1)$$

は発散するので、ダランベールの収束定理より $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ は収束しない。

(*1) $\forall K > 0$ に対して $N = \left\lceil \frac{K}{|x|} \right\rceil$ とおけば、 $\forall n \geq N$ に対して

$$\left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = (n+1)|x| \geq (N+1)|x| > \frac{K}{|x|}|x| = K$$

(2) $(-R, R)$ を収束域とする整級数(の一例) は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}{\left(\frac{x}{R}\right)^n} \right| = \left| \frac{x}{R} \right| \quad (*2)$$

なので、ダランベールの収束定理より $x \in (-R, R)$ のとき収束し、 $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ のとき収束しない。

(*2) $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\left| \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}{\left(\frac{x}{R}\right)^n} \right| = \left| \frac{x}{R} \right|$$

より。

$x = R$ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ は収束しない。

$x = -R$ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ は収束しない。

($\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \left| \frac{x}{R} \right|$ のとき一般に、ダランベールの収束定理より $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$

は $\left| \frac{x}{R} \right| < 1$ をみたす x については収束し、 $\left| \frac{x}{R} \right| > 1$ をみたす x については収束しません。ここまでは (2)(3)(4)(5) 共通。

以下 (2) の例について。 $\left| \frac{x}{R} \right| = 1$ をみたす x については、 $x = R$ では ∞ に発散し、 $x = -R$ では -1 と 0 を交互に繰り返し、振動します。

ちなみに、この整級数は $\frac{x}{R-x}$ の $x = 0$ におけるテイラー級数展開 (マクローリン級数展開) です。この関数は $x = R$ では定義されませんが、 $x = -R$ では有限な値 $-\frac{1}{2}$ を持ちます。)

(3) $(-R, R]$ を収束域とする整級数(の一例) は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{R}\right)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left| \frac{x}{R} \right| = \left| \frac{x}{R} \right| \quad (*3)$$

なので、ダランベールの収束定理より $x \in (-R, R)$ のとき収束し、 $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ のとき収束しない。

(*3) $\forall \epsilon > 0$ に対して $N = \left\lceil \frac{|x|}{R\epsilon} \right\rceil$ とおけば、 $\forall n \geq N$ に対して

$$\left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{R}\right)^n} - \left| \frac{x}{R} \right| \right| = \frac{|x|}{(n+1)R} \leq \frac{|x|}{(N+1)R} < \frac{R\epsilon}{R} = \epsilon$$

$x = R$ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ である。 $\frac{1}{n} \geq 0, \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ は単調減少、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ なので、ライプニッツの交代級数定理より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束する。

$x = -R$ のとき、 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ であり、収束しない。

(この整級数は $\log |R + x| - \log R$ の $x = 0$ におけるテイラー級数展開(マクローリン級数展開)です。この関数は $x = R$ では有限な値 $\log 2$ を持ちますが、 $x = -R$ では定義されません。)

(4) $[-R, R)$ を収束域とする整級数(の一例) は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{x}{R}\right)^n$$

である。

(証明は) (3) と同様である。

(この整級数は $\log |R - x| - \log R$ の $x = 0$ におけるテイラー級数展開(マクローリン級数展開)です。この関数は $x = R$ では定義されませんが、 $x = -R$ では有限な値 $\log 2$ を持ちます。)

(5) $[-R, R]$ を収束域とする整級数(の一例) は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n^2} \left(\frac{x}{R}\right)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \left| \frac{x}{R} \right| = \left| \frac{x}{R} \right| \quad (*4)$$

なので、ダランベールの収束定理より $x \in (-R, R)$ のとき収束し、 $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ のとき収束しない。

(*4) $\forall \epsilon > 0$ に対して $N = \left\lceil \frac{2|x|}{R\epsilon} \right\rceil$ とおけば、 $\forall n \geq N$ に対して

$$\left| \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n^2} \left(\frac{x}{R}\right)^n} \right| - \left| \frac{x}{R} \right| \right| = \frac{(2n+1)|x|}{(n+1)^2 R} \leq \frac{2|x|}{(n+1)R} \leq \frac{2|x|}{(N+1)R} < \frac{R\epsilon}{R} = \epsilon$$

$x = R$ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ であり、収束する。

$x = -R$ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ である。 $\frac{1}{n^2} \geq 0$, $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ は単調減

少、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ なので、ライプニッツの交代級数定理より

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ は収束する。

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を証明無しで認めるならば、 $x = -R$ の場合については、絶対収束するので収束するという説明でもよいでしょう。

この整級数は、広義積分で定義される関数

$$f(x) = \begin{cases} -\int_0^{x/R} \frac{\log |1-t|}{t} dt & (-R \leq x < 0, 0 < x \leq R) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の $x = 0$ におけるテイラー級数展開 (マクローリン級数展開) になっています。

この関数は $x = R$ では有限な値 $\frac{\pi^2}{6}$ を、 $x = -R$ では有限な値 $-\frac{\pi^2}{12}$ を、それぞれ持ちます。)

(6) $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ を収束域とする整級数(の一例) は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

である。

$x = 0$ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ である。

$x \neq 0$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 \quad (*5)$$

なので、ダランベールの収束定理より $x \in \mathbf{R}$ で収束する。

(*5) $\forall \epsilon > 0$ に対して $N = \left\lceil \frac{|x|}{\epsilon} \right\rceil$ とおけば、 $\forall n \geq N$ に対して

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{|x|}{N+1} < \epsilon$$

(この整級数は $e^x - 1$ の $x = 0$ におけるテイラー級数展開(マクローリン級数展開)です。)