数学基礎演習2・演習問題

—B.1—

[線形代数2A[公大]／線形代数2[市大]]

$\boxed{\text{ベクトル空間}}$

問**B.1.1**　V, W は $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間とする。

$$V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

もまた$\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

問**B.1.2**　V, W は $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間とする。$V \cap W$ もまた$\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

問**B.1.3**　V, W は $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間とする。$V \cup W$ もまた$\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間となるとき、$V \subset W$ または $V \supset W$ が成り立つことを示せ。

問 B.1.4　実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ で表す。$M_n(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{n^2}$ と自然に同一視することにより数ベクトル空間と考えられる。このとき

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tA = A\}$$
$$\mathrm{Alt}_n(\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tA = -A\}$$

は $M_n(\mathbf{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

注意： $\mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ は対称行列全体の集合、$\mathrm{Alt}_n(\mathbf{R})$ は交代行列全体の集合である。

問 B.1.5　$M_n(\mathbf{R})$ は問 B.1.4 の通りとする。n 次正方行列 A のトレース(対角成分の和)を $\mathrm{tr}\ A$ で表す。

$$M_n' = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr}\ A = 0\}$$

は $M_n(\mathbf{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

問B.1.6　t に関する n 次以下の多項式全体の集合を $\mathbf{R}[t]_n$ で表す。$\mathbf{R}[t]_n$ は単項式や定数関数も含むものとする。$\mathbf{R}[t]_n$ は多項式の通常の加法とスカラー倍によりベクトル空間となる。

$$V := \{f \in \mathbf{R}[t]_n \mid f(0) = 0\}$$
$$W := \{f \in \mathbf{R}[t]_n \mid f(-1) = f(1) = 0\}$$

は、いずれも $\mathbf{R}[t]_n$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

問B.1.7　$\mathbf{R}[t]_n$ は問 B.1.6 の通りとする。

$$X := \{f \in \mathbf{R}[t]_n \mid f(0) = 1\}$$

は $\mathbf{R}[t]_n$ の部分ベクトル空間でないことを示せ。

　一方、この X に、通常とは異なる加法とスカラー倍を定義すれば、ベクトル空間とすることが可能である。どのような加法とスカラー倍を定義すればよいか、一例を挙げよ。