

数学基礎演習2・演習問題

—B.2—

[線形代数2A[公大]／線形代数2[市大]]

問 B.2.3 は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

線形従属、線形独立、基底、次元

問 **B.2.1** n 次上半三角行列 A の対角成分は全て 0 ではないとする。 A の列ベクトルを $a_1, \dots, a_n$ とするとき、これらは線形独立であることを示せ。

問 **B.2.2** n は自然数で $n \geq 2$ とする。 e_i ($i = 1, \dots, n$) は $\mathbf{R}^n$ の標準基底とする。

$$(*) \quad e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) n が偶数の時、 $(*)$ は線形従属であることを示せ。
- (2) n が奇数の時、 $(*)$ は線形独立であること、さらに $\mathbf{R}^n$ の基底となることを示せ。

問 **B.2.3** $M_n(\mathbf{R})$ は問 B.1.4 の通りとする。 $i, j = 1, \dots, n$ に対し、 (i, j) 成分のみ 1 で、他の成分は全て 0 であるような $M_n(\mathbf{R})$ の元を E_{ij} で表す。このとき、 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) は線形独立であること、さらに $M_n(\mathbf{R})$ の基底となることを示せ。

問 **B.2.4** $M_n(\mathbf{R})$, $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$, $\text{Alt}_n(\mathbf{R})$ は問 B.1.4 の通り、 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) は問 B.2.3 の通りとする。 $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$, $\text{Alt}_n(\mathbf{R})$ それぞれについて、その一組の基底を、 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) を用いて表せ。また、それぞれの次元を求めよ。

問 **B.2.5** $M_n(\mathbf{R})$ は問 B.1.4 の通り、 M'_n は問 B.1.5 の通り、 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) は問 B.2.3 の通りとする。 M'_n について、その一組の基底を、 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) を用いて表せ。また、その次元を求めよ。

問 **B.2.6** $\mathbf{R}[t]_n$ は問 B.1.6 の通り、 V, W は問 B.1.7 の通りとする。 V, W それぞれについて、その一組の基底を求めよ。また、それぞれの次元を求めよ。

解答例

問 B.2.3

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = O$ とする。 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ は、 (i, j) 成分を a_{ij} とする $n \times n$ 行列である。 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = O$ より、任意の i, j に対して、 $a_{ij} = 0$ である。したがって、 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) は線形独立である。

次に、 $\{E_{ij}\} (i, j = 1, \dots, n)$ が $M_n(\mathbf{R})$ の基底であることを示す。 $\{E_{ij}\} (i, j = 1, \dots, n)$ が線形独立であることは既を示したので、 $\{E_{ij}\} (i, j = 1, \dots, n)$ が $M_n(\mathbf{R})$ を生成することを示す。任意に $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ をとる。 A は (i, j) 成分を a_{ij} とする $n \times n$ 行列である。したがって、

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

が成り立つ。よって、 $\{E_{ij}\} (i, j = 1, \dots, n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ を生成する。以上より、 $\{E_{ij}\} (i, j = 1, \dots, n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ の基底である。