

# 数学基礎演習2・演習問題

—B.3—

[線形代数2A[公大]／線形代数2[市大]]

問 B.3.1(a), B.3.5(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

(なお今回は、その他にも発表上の注意があります。)

## 行列の階数

問 **B.3.1**(a-i)  $a$  は実数とする。行列

$$A = \begin{matrix} & \text{(a)} & & \text{(b)} & & \text{(c)} \\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \\ & \text{(d)} & & \text{(e)} & & \text{(f)} \\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \\ & \text{(g)} & & \text{(h)} & & \text{(i)} \\ \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & a & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

について、階数  $\text{rank } A$  を求めよ。

問 **B.3.2**  $a, b, c$  は実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) 行列式  $|A|$  を求めよ。
- (2) 階数  $\text{rank } A$  を求めよ。

問 **B.3.3(a-b)**  $a$  は実数とする。3 次正方行列

$$A = \begin{matrix} & \text{(a)} & & \text{(b)} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & a^2 & a^4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) 行列式  $|A|$  を求めよ。
- (2)  $|A| \neq 0$  となる  $a$  の条件を求めよ。
- (3)  $A$  の余因子行列  $\tilde{A}$  を求めよ。
- (4) (2) で得た条件を満たす  $a$  について、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めよ。
- (5) (2) で得た条件を満たさない  $a$  について、 $\text{rank } A, \text{rank } \tilde{A}$  を求めよ。

## 行列の階数＋連立方程式

(問 B.3.4 については、各小問に対して、問 B.3.5 に関連する小問がありますので、例外的に両方の解答をセットで発表して下さい。)

### 問 B.3.4(a-f) 連立一次方程式

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \begin{cases} x + ay + az = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ ax + ay + z = 0 \end{cases} & \text{(b)} & \begin{cases} ax + ay + az = 0 \\ x + ay + az = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases} \\
 (*) \text{ (c)} & \begin{cases} 2x + ay = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ ay + 2z = 0 \end{cases} & \text{(d)} & \begin{cases} 2x + ay = 0 \\ ax + ay + az = 0 \\ ay + 2z = 0 \end{cases} \\
 \text{(e)} & \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y + az = 0 \\ ay + 2z = 0 \end{cases} & \text{(f)} & \begin{cases} 2x + y = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

が解を無限個持つような  $a$  の値を求めよ。

(問 B.3.5 については、各小問に対して、問 B.3.4 に関連する小問がありますので、例外的に両方の解答をセットで発表して下さい。)

問 **B.3.5**(a-f) 連立一次方程式

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad \begin{cases} x + ay + az = 1 \\ ax + y + az = 1 \\ ax + ay + z = 1 \end{cases} & (b) \quad \begin{cases} ax + ay + az = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} \\
 (**)(c) \quad \begin{cases} 2x + ay = 1 \\ ax + y + az = 1 \\ ay + 2z = 1 \end{cases} & (d) \quad \begin{cases} 2x + ay = 1 \\ ax + ay + az = 0 \\ ay + 2z = 1 \end{cases} \\
 (e) \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y + az = 0 \\ ay + 2z = 1 \end{cases} & (f) \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ ax + y + az = 2 \\ ay + 2z = 3 \end{cases}
 \end{array}$$

について、次の各問に答えよ。

- (1)  $(**)$  が解を持たないような  $a$  の値を求めよ。
- (2)  $(**)$  が解を無限個持つような  $a$  の値を求めよ。
- (3) (2) で得た値の  $a$  について、 $(**)$  の解を一つ求めよ。

$$(4) \quad (3) \text{ で得た解を } \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \text{ とする。このとき、(2) で得た}$$

値の  $a$  に対する  $(**)$  の全ての解を、

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 x_1 \\ y = y_0 + t_1 y_1 \\ z = z_0 + t_1 z_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbf{R}) \text{ または } \begin{cases} x = x_0 + t_1 x_1 + t_2 x_2 \\ y = y_0 + t_1 y_1 + t_2 y_2 \\ z = z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R})$$

のいずれかの形で表すことができる。この場合いずれの形が適当かを答え、 $x_1, y_1, z_1$  または  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  を一組与えよ。

ヒント：問 B.3.4 の  $(*)$

## 解答例

(ここでは、基本変形(行変形)を用いた、掃き出し法による解答を紹介しています。小行列式を用いる等、他の方法で解答しても、もちろん構いません。)

以下、行列の基本変形について  $[i] \times j$  で第  $i$  行を  $j$  倍する操作、 $[k] \leftrightarrow [l]$  で第  $k$  行と第  $l$  行を入れ替える操作、 $[p] + [q] \times r$  で第  $p$  行に第  $q$  行の  $r$  倍を加える操作を表すものとする。(ただし、 $r = -1$  のときは  $[p] - [q]$  と表すものとする。)

問 **B.3.1(a)**  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$  を簡約化すると、

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2] - [1] \\ [3] - [1] \times a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a - 1 & 1 - a \\ 0 & 1 - a & 1 - a^2 \end{pmatrix}$$

(本来、基本変形は一つずつ行うべきところですが、ここで同時に行っている二つの基本変形は互いに独立で、行う順序を入れ替えても結果は変わらないので、記述を短くするため、二つまとめて記しています。)

$1 - a = 0$  すなわち  $a = 1$  のとき

$$A \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a - 1 & 1 - a \\ 0 & 1 - a & 1 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $\text{rank } A = 1$ .

$1 - a \neq 0$  すなわち  $a \neq 1$  のとき

$$\begin{aligned} A & \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{a-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{[3] - [2] \times (1-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 $(2 - a - a^2 = -(a - 1)(a + 2) \text{ より})$   $a \neq 1$  かつ  
 $2 - a - a^2 = 0$  となるのは  $a = -2$  のときである。

$a = -2$  のとき

$$A \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $\text{rank } A = 2$ .

$a \neq 1$  かつ  $a \neq -2$  のとき

$$\begin{array}{lcl}
 A & \xrightarrow{\substack{\text{簡約化}}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{[3] \times \frac{1}{2-a-a^2}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{[1] - [3] \times (a+1) \\ [2] + [3]}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

より、 $\text{rank } A = 3$ .

以上により、

$$\text{rank } A = \begin{cases} 1 & (a = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a = -2 \text{ のとき}) \\ 3 & (a \neq 1 \text{ かつ } a \neq -2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(基本変形を用いない解答としては、例えば、初めに行列式を

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2)$$

と計算して、 $a \neq 1$  かつ  $a \neq -2$  のとき  $|A| \neq 0$  より  $\text{rank } A = 3$  であることを確認した後、 $a = 1$ ,  $a = -2$  それぞれの場合について、さらに小行列式を計算する方法があります。)

問 **B.3.5(a)**

(1),(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると、連立一次方程式  $(**)$  は  $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$  と表される。ここで、この方程式の拡大係数行列  $(A \mid \boldsymbol{b})$  の簡約化を考える。

$$\begin{aligned}
 (A \mid \mathbf{b}) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\substack{[2]-[1]\times a \\ [3]-[1]\times a}]{} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 & 1-a \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

ここで、 $1 - a^2 = 0$  となるのは  $a = \pm 1$  のときである。

$a = 1$  のとき

$$(A \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

より、 $\text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \text{rank } A = 1 < 3$  なので、連立一次方程式  
(\*\*) は解を無限個持つ。

$a = -1$  のとき

$$\left( A \mid \mathbf{b} \right) \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[2] \leftrightarrow [3]} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} [2] \times \left( -\frac{1}{2} \right) \\ [3] \times \left( -\frac{1}{2} \right) \end{array} \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[1]+[2]} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[1]+[3]} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

より、 $\text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \text{rank } A = 3$  なので、連立一次方程式 (\*\*) の解はただ一つ存在する。

$a \neq \pm 1$  のとき

$$\begin{aligned}
 (A \mid \mathbf{b}) & \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 & 1-a \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{1-a^2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{1+a} & \frac{1}{1+a} \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} [1]-[2] \times a \\ [3]-[2] \times (a-a^2) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{a}{1+a} & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 1 & \frac{a}{1+a} & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & \frac{1+a-2a^2}{1+a} & \frac{1-a}{1+a} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

ここで、 $(1 + a - 2a^2 = -(a - 1)(2a + 1) \text{ より})$   $a \neq \pm 1$  かつ  
 $1 + a - 2a^2 = 0$  となるのは  $a = -\frac{1}{2}$  のときである。

$a = -\frac{1}{2}$  のとき

$$\begin{aligned} (A \mid \mathbf{b}) &\xrightarrow{\text{(簡約化)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{[3] \times \frac{1}{3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\begin{array}{l} [1] - [3] \times 2 \\ [2] - [3] \times 2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

より、 $\text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = 2 < \text{rank } A = 3$  なので、連立一次方程式  
(\*\*) は解を持たない。

$a \neq \pm 1$  かつ  $a \neq -\frac{1}{2}$  のとき

$$\begin{aligned}
 (A \mid \mathbf{b}) & \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \left( \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{a}{1+a} & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 1 & \frac{a}{1+a} & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & \frac{1+a-2a^2}{1+a} & \frac{1-a}{1+a} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{[3] \times \frac{1+a}{1+a-2a^2}} \left( \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{a}{1+a} & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 1 & \frac{a}{1+a} & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2a+1} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} [1]-[3] \times \frac{a}{1+a} \\ [2]-[3] \times \frac{1}{1+a} \end{array} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2a+1} \end{array} \right)$$

より、 $\text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \text{rank } A = 3$  なので、連立一次方程式 (\*\*) の解はただ一つ存在する。

以上より、(1),(2)の答えは

$$(1) \quad a = -\frac{1}{2},$$

$$(2) \quad a = 1$$

である。

(3)  $a = 1$  のとき、

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

とすると、これは連立一次方程式 (\*\*) の解の一つである。

(4) (3)の結果により、 $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$  である。問  
B.3.4(a) (の解答の一部(下記参照)) により、 $a = 1$  のとき、連立一次  
方程式  $(*)$ , すなわち  $Ax = \mathbf{0}$  の解は、

$$\begin{cases} x = -t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R})$$

である。

( $a = 1$  のとき

$$(A \mid \mathbf{0}) \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

より)

ここで、連立一次方程式  $Ax = b$  の解の一つ (特殊解) を  $x_0$ , 同次形の連立一次方程式  $Ax = 0$  の解 (一般解) を  $x_1$  とすると、 $x_0 + x_1$  は連立一次方程式  $Ax = b$  の解であり、さらに連立一次方程式  $Ax = b$  の全ての解 (一般解) は  $x_0 + x_1$  で表されるので、連立一次方程式  $(**)$  の全ての解は

$$\begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R})$$

である。

以上により、 $a = 1$  に対する  $(**)$  の全ての解は、

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 x_1 + t_2 x_2 \\ y = y_0 + t_1 y_1 + t_2 y_2 \\ z = z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R})$$

の形で表され、 $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (-1, 1, 0, -1, 0, 1)$  である。

(この問については、まず行列式を

$$|A| = 2a^3 - 3a^2 + 1 = (a - 1)^2(2a + 1)$$

と計算して、 $|A| = 0$  すなわち  $\text{rank } A \leq 3 - 1 = 2$  となるのは  $a = 1$  または  $a = -\frac{1}{2}$  のときに限り、これらの場合に問 B.3.4(a) の  $(*)$  が無限個を持つことを、先に確認しておく方法もあります。)