

数学基礎演習2・演習問題

—B.4—

[線形代数2A[公大]／線形代数2[市大]]

問 B.4.2(a), B.4.3(c), B.4.5(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

行列の対角化＋二次曲線

問 B.4.1 曲線 $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x}$ の方程式を、次の基底に関する座標に書き換えよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問 B.4.2(a-f) 曲線

$$(a) \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 = 1$$

$$(b) \quad 7x^2 - 12xy - 2y^2 = 1$$

$$(c) \quad 8x^2 + 12xy + 17y^2 = 20$$

$$(d) \quad 2x^2 + 28xy + 23y^2 = 30$$

$$(e) \quad 3x^2 + 32xy + 27y^2 = 35$$

$$(f) \quad 9x^2 + 16xy + 21y^2 = 25$$

について、この方程式の左辺が

$$A = \begin{matrix} (a) & (b) & (c) \\ \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}, \\ (d) & (e) & (f) \\ \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 14 & 23 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 21 \end{pmatrix}, \end{matrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いると ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と書けることに注意して、次の各問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値を全て求めよ。
- (2) (1)で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。
- (3) 行列 A を対角化する直交行列 P を一つ求めよ。
- (4) (3)で求めた P を用いて、問の曲線の方程式を適当な座標で書き直し、この曲線がどのような曲線であるか答えよ。

問B.4.3(a-f) a, b, c は実数とする。曲線

$$(a) \quad 3x^2 + 4xy + 3y^2 + ay + 15 = 0 \quad (b) \quad 9x^2 + 8xy + 3y^2 + ax + by = 0$$

$$(c) \quad 3x^2 + 4xy + ay = 3 \quad (d) \quad 6x^2 + 8xy - 9y^2 + ay = 105$$

$$(e) \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2 + ax + by = 0 \quad (f) \quad x^2 + 2axy + y^2 + bx + cy = 1$$

について、二次の項

$$(a) \quad 3x^2 + 4xy + 3y^2$$

$$(b) \quad 9x^2 + 8xy + 3y^2$$

$$(c) \quad 3x^2 + 4xy$$

$$(d) \quad 6x^2 + 8xy - 9y^2$$

$$(e) \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$(f) \quad x^2 + 2axy + y^2$$

が

$$A = \begin{matrix} & \text{(a)} & & \text{(b)} & & \text{(c)} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \text{(d)} & & \text{(e)} & & \text{(f)} \\ \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

を用いると ${}^t x A x$ と書けることに注意して、次の各問に答えよ。

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ。

(2) (1)で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3) 行列 A を対角化する直交行列 P を一つ求めよ。

(4) (3)で求めた P を用いて、問の曲線の方程式を適当な座標で書き直し、

(a) この曲線が1点となってしまうような a の値を求めよ。

(b) この曲線が1点となってしまうような a, b に関する条件を求めよ。

(c,d) この曲線が交わる2直線となるような a の値を求めよ。

(e) この曲線が平行な2直線となるような a, b に関する条件を求めよ。

(f) この曲線が放物線となるような a, b, c に関する条件を求めよ。

(5) (4)で求めた

(a,b) a に対し、(4) の 1 点の ((4)で座標変換する前の) 座標を求めよ。

(c,d) a に対し、2 直線の交点の ((4)で座標変換する前の) 座標を求めよ。

(e) 条件を満たす a, b の内、特に 2 直線の間の距離が 1 となるような a, b の値を求めよ。

行列のべき乗

問 B.4.4 a, b は実数、 n は自然数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ b^2 & 1 \end{pmatrix}$$

について A^n を求めよ。

問 B.4.5(a-d) n は自然数とする。行列

$$A = \begin{matrix} & \text{(a)} & & \text{(b)} & & \text{(c)} & & \text{(d)} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値を全て求めよ。
- (2) (1)で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。
- (3) 行列 A を対角化する（すなわち $P^{-1}AP$ が対角行列となるような）正則行列 P を一つ求めよ。
- (4) (3)で求めた P を用いて A^n を求めよ。

解答例

問B.4.2(a)

(1) A の固有多項式 $g_A(t)$ を求めると、

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t - 9 & 2 \\ 2 & t - 6 \end{vmatrix} = (t - 5)(t - 10)$$

となるので、 A の固有値は $\lambda = 5, 10$ である。

(2) $\lambda = 5$ とする。 $(5E - A)x = 0$ の解空間が A の固有値 5 の固有空間 $W(5; A)$ である。このとき $5E - A$ を簡約化すると

$$5E - A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(5E - A)x = 0$ の解は

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(5; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 5 に属する A の固有ベクトルである。

$\lambda = 10$ とする。 $(10E - A)x = 0$ の解空間が A の固有値 10 の固有空間 $W(10; A)$ である。このとき $10E - A$ を簡約化すると

$$10E - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(10E - A)x = 0$ の解は

$$x = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(10; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって、 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有値 10 に属する A の固有ベクトルである。

(3) $\dim(W(5; A)) + \dim(W(10; A)) = 1 + 1 = 2$ となるので、
 A は対角化可能である。

$W(5; A)$ の基 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ を正規化すると $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ である。
また $W(10; A)$ の基 $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を正規化すると

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である。

$W(5; A)$ の各ベクトルと $W(10; A)$ の各ベクトルは直交するので $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基である。

よって、この $\mathbb{R}^2$ の正規直交基を列ベクトルにもつ行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 P は直交行列で、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4) P は直交行列なので、 $P^{-1} = {}^tP$ であり、

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と直交変数変換すると

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= {}^t(P\boldsymbol{x}')A(P\boldsymbol{x}') = {}^t\boldsymbol{x}'({}^tPAP)\boldsymbol{x}' \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= 5x'^2 + 10y'^2 \end{aligned}$$

と表される。

よって、曲線 $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 1$ は直交変数変換

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

によって $5x'^2 + 10y'^2 = 1$ と表される。

これは、 $x'y'$ 平面上で中心が原点、長軸の長さが $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 、短軸の長さが $\frac{2}{\sqrt{10}}$ 、焦点が $(x', y') = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 \right)$ の楕円を表す方程式である。

直交変数変換 $x = Px'$ に現れる 2×2 直交行列 P について $\det P = 1$ が成り立つので、この座標変換は回転移動による変換であり、 $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 1$ は xy 平面上で中心が原点、長軸の長さが $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 、短軸の長さが $\frac{2}{\sqrt{10}}$ 、焦点が $(x, y) = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}, \frac{2}{5\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}, -\frac{2}{5\sqrt{2}} \right)$ の楕円を表す。

(回転しているのはあくまで座標(軸)であり、楕円そのものが回転しているのではないことに要注意。)

問 B.4.3(c)

(1) A の固有多項式 $g_A(t)$ を求めると、

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t+1)(t-4)$$

となるので、 A の固有値は $\lambda = -1, 4$ である。

(2) $\lambda = -1$ とする。 $(-E - A)x = 0$ の解空間が A の固有値 -1 の固有空間 $W(-1; A)$ である。このとき $-E - A$ を簡約化すると

$$-E - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(-E - A)x = 0$ の解は

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(-1; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 -1 に属する A の固有ベクトルである。

$\lambda = 4$ とする。 $(4E - A)x = 0$ の解空間が A の固有値 4 の固有空間 $W(4; A)$ である。このとき $4E - A$ を簡約化すると

$$4E - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(4E - A)x = 0$ の解は

$$x = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(4; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有値 4 に属する A の固有ベクトルである。

(3) $\dim(W(-1; A)) + \dim(W(4; A)) = 1 + 1 = 2$ となるので、
 A は対角化可能である。

$W(-1; A)$ の基 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ を正規化すると $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

である。また $W(4; A)$ の基 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を正規化すると

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である。

$W(-1; A)$ の各ベクトルと $W(4; A)$ の各ベクトルは直交するの
で $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基である。

よって、この $\mathbb{R}^2$ の正規直交基を列ベクトルにもつ行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 P は直交行列で、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4) P は直交行列なので、 $P^{-1} = {}^tP$ であり、

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。また、曲線 $3x^2 + 4xy + ay = 3$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

を用いて ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = 3$ と表される。

よって、

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

によって直交変数変換すると

$$\begin{aligned}
{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} &= {}^t(P\boldsymbol{x}')A(P\boldsymbol{x}')^t + {}^t\boldsymbol{b}(P\boldsymbol{x}') \\
&= {}^t\boldsymbol{x}'({}^tPAP)\boldsymbol{x}' + {}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x}' \\
&= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & a \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= -x'^2 + 4y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}ax' + \frac{1}{\sqrt{5}}ay'
\end{aligned}$$

と表される。

よって、曲線 $3x^2 + 4xy + ay = 3$ は直交変数変換

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

によって

$$-x'^2 + 4y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}ax' + \frac{1}{\sqrt{5}}ay' = 3$$

すなわち、

$$x'^2 - 4y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}ax' - \frac{1}{\sqrt{5}}ay' + 3 = 0$$

と表される。

この曲線が交わる2直線となるためには、この式の左辺が x', y' の1次式の積、すなわち

$$(px' + qy' + r)(sx' + ty' + u) \quad (\text{ただし、 } p, q, r, s, t, u \in \mathbf{R})$$

の形に因数分解されなければならない。

$$x'^2 - 4y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}ax' - \frac{1}{\sqrt{5}}ay' + 3 = 0$$

を x', y' それぞれについて平方完成すると、

$$\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}a\right)^2 - 4\left(y' + \frac{1}{8\sqrt{5}}a\right)^2 = \frac{3}{16}a^2 - 3$$

ここで、この曲線の方程式を x' 軸方向に $-\frac{1}{\sqrt{5}}a$ 、 y' 軸方向に $-\frac{1}{8\sqrt{5}}a$ 平行移動すると

$$x'^2 - 4y'^2 = \frac{3}{16}a^2 - 3$$

すなわち

$$(x' + 2y')(x' - 2y') = \frac{3}{16}a^2 - 3$$

である。この式が x', y' の1次式の積で表されるためには、定数部分が 0、すなわち、 $\frac{3}{16}a^2 - 3 = 0$ でなければならない。
よって $a = \pm 4$

(5) $a = 4$ のとき $x'y'$ 平面上での曲線の方程式は

$$x'^2 - 4y'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{4}{\sqrt{5}}y' + 3 = 0$$

である。この式は

$$\left(x' - 2y' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \left(x' + 2y' + \frac{5}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

と因数分解できるので、この方程式は2直線

$$x' - 2y' + \frac{3}{\sqrt{5}} = 0, \quad x' + 2y' + \frac{5}{\sqrt{5}} = 0$$

をあらわす。この2直線の交点の座標を求めると、 $x'y'$ 平面上で

$$(x', y') = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$$

今、

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

で直交変数変換しているので、この変換により $x'y'$ 平面上の点 $(x', y') = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ は xy 平面上の点 $(x, y) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ にうつる。

よって、2直線の交点の ((4) で座標変換する前の) 座標は $(x, y) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ である。

$a = -4$ のとき $x'y'$ 平面上での曲線の方程式は

$$x'^2 - 4y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{\sqrt{5}}y' + 3 = 0$$

である。この式は

$$\left(x' - 2y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \left(x' + 2y' - \frac{5}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

と因数分解できるので、この方程式は2直線

$$x' - 2y' - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0, \quad x' + 2y' - \frac{5}{\sqrt{5}} = 0$$

をあらわす。この2直線の交点の座標を求めると、 $x'y'$ 平面上で

$$(x', y') = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$$

今、

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

で直交変数変換しているので、この変換により $x'y'$ 平面上の点 $(x', y') = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)$ は xy 平面上の点 $(x, y) = \left(1, -\frac{3}{2} \right)$ にうつる。

よって、2直線の交点の（(4)で座標変換する前の）座標は $(x, y) = \left(1, -\frac{3}{2} \right)$ である。

問 B.4.5(a)

(1) A の固有多項式 $g_A(t)$ を求めると、

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t+2 & -2 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)$$

となるので、 A の固有値は $\lambda = 1, 2$ である。

(2) $\lambda = 1$ とする。 $(E - A)x = 0$ の解空間が A の固有値 1 の固有空間 $W(1; A)$ である。このとき $E - A$ を簡約化すると

$$E - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(E - A)x = 0$ の解は

$$x = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(1; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は A の固有値 1 に属する A の固有ベクトルである。

$\lambda = 2$ とする。 $(2E - A)x = 0$ の解空間が A の固有値 2 の固有空間 $W(2; A)$ である。このとき $2E - A$ を簡約化すると

$$2E - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(2E - A)x = 0$ の解は

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(2; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 2 に属する A の固有ベクトルである。

(3) $\dim(W(1; A)) + \dim(W(2; A)) = 1 + 1 = 2$ となるので、 A は対角化可能である。

さらに、 $W(1; A)$ と $W(2; A)$ の基を用いて

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4) (3) の結果により $P^{-1}AP$ は対角行列なので

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

また、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} A^n &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 3 \cdot 2^n & -2 + 2^{n+1} \\ 6 - 3 \cdot 2^{n+1} & -3 + 2^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$