

数学基礎演習2・演習問題

—B.5—

[線形代数2A[公大]／線形代数2[市大]]

問 B.5.8(a), B.5.11(a), B.5.13(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

内積、外積

問 **B.5.1** 二つの n 項数ベクトル a, b に対し、中線定理

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

を示せ。

問 **B.5.2** 三つの空間ベクトル a, b, c に対し、次の等式を示せ。

$$(a \times b, c) = |a, b, c|$$

問 **B.5.3** 二つの空間ベクトル a, b に対し、次の等式を示せ。

$$(a \times b, b) = 0$$

注意：定義に戻って直接示せ。

問 **B.5.4** 二つの空間ベクトル a, b に対し、次の等式を示せ。

$$(a, b)^2 + |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2$$

問 B.5.5 二つの空間ベクトル a, b に対し、次の等式を示せ。

$$b \times (a \times b) = |b|^2 a - (a, b)b$$

問 B.5.6 三つの空間ベクトル a, b, c に対し、次の等式を示せ。

$$c \times (a \times b) = (b, c)a - (a, c)b$$

ヒント：直接示せるが、問 B.5.2 の公式を用いた解答も可。

直線、平面

問 **B.5.7** 二つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ および点

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

(1) 次を計算せよ。

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad |\boldsymbol{a}|, \quad |\boldsymbol{b}|, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

(2) 点 P を通り $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方と平行な平面の方程式を求めよ。

(3) 点 P を通り $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方と垂直な直線の方程式を求めよ。

注意： (2), (3) 共に、公式に値を代入するだけの解答は認めない。

問 **B.5.8**(a-c) 次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および点 P について、下の各問に答えよ。

$$(a) \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (1) (a, b) , $|a|$, $|b|$, $a \times b$ を計算せよ。
- (2) 点 P を通り a , b の両方と平行な平面の媒介変数表示を求めよ。
- (3) (2) の平面の媒介変数を用いない方程式を求めよ。
- (4) 点 P を通り a , b の両方と垂直な直線の媒介変数表示を求めよ。

問 **B.5.9** 次の二つのベクトルについて、 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ を計算せよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 - 3i \end{pmatrix}.$$

直交行列

問 **B.5.10** $|a_1| = |a_2| = |b_1| = |b_2| = 1, (a_1, a_2) = (b_1, b_2) = 0$
を満たす四つの空間ベクトル a_1, a_2, b_1, b_2 に対し、

$$\begin{aligned} P &= (b_1, b_2, b_1 \times b_2) (a_1, a_2, a_1 \times a_2)^{-1} \\ &= (b_1, b_2, b_1 \times b_2)^t (a_1, a_2, a_1 \times a_2) \end{aligned}$$

とおくと、 P は直交行列で、 $Pa_1 = b_1, Pa_2 = b_2$ を満たすことを確かめよ。

問 **B.5.11**(a-c) 四つの空間ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は、

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{32}{33} \\ \frac{8}{33} \\ \frac{1}{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{33} \\ \frac{31}{33} \\ \frac{8}{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられるものとする。それぞれの場合について、次の各問に答えよ。

- (1) ベクトル a_1, a_2, b_1, b_2 は、いずれも単位ベクトルであること、 a_1 と a_2, b_1 と b_2 が、それぞれ直交することを確認せよ。
- (2) 外積 $a_1 \times a_2, b_1 \times b_2$ を求めよ。
- (3) $Pa_1 = b_1, Pa_2 = b_2, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

問 **B.5.12**(a-c) 次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について、下の各問に答えよ。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad \boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad \boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (1) ベクトル a, b, c は、いずれも単位ベクトルであること、 a と b , a と c が、それぞれ直交することを確認せよ。
- (2) 外積 $a \times b, a \times c$ を求めよ。
- (3) $Pa = a, Pb = c, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

正規直交基

問 **B.5.13**(a-d) 次のベクトルの組に Schmidt の直交化法を施し、正規直交基を作れ。

$$(a) \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(b) \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解答例

問 **B.5.8**(a)

(1)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{77},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2) 求める平面上の任意の点を $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、求める平

面は2つの媒介変数 $s, t \in \mathbf{R}$ を用いて $x = P + sa + tb$ と表される。

よって、求める平面の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 7 + s + 4t & \cdots [1] \\ y = 8 + 2s + 5t & \cdots [2] \\ z = 9 + 3s + 6t & \cdots [3] \end{cases} \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

である。

(3) $[1] \times 2 - [2]$ より $2x - y = 6 + 3t$ すなわち

$$t = \frac{2x - y - 6}{3} \dots [4]$$

である。

また、 $[1] \times 3 - [3]$ より $3x - z = 12 + 6t$ すなわち

$$t = \frac{3x - z - 12}{6} \dots [5]$$

である。

$[4], [5]$ より t を消去して

$$\frac{2x - y - 6}{3} = \frac{3x - z - 12}{6}$$

すなわち $x - 2y + z = 0$ である。

(別解)

問 B.5.3の結果により、 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0$,

また、同様にして $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$,

ゆえに、 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と垂直なベクトルである。

よって、 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と平行な平面と直交する。求める平面は点

P を通るので、求める平面上の任意の点を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、

$((\boldsymbol{x} - P), \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$ すなわち

$$(x - 7) \cdot (-3) + (y - 8) \cdot 6 + (z - 9) \cdot (-3) = 0$$

これを整理して求める方程式は $-3x + 6y - 3z = 0$ である。

(すなわち $x - 2y + z = 0$ である。)

(4) 問 B.5.3の結果により、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$,

また、同様にして $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0$,

ゆえに、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と垂直なベクトルである。

((3)で別解を採用した場合は、ここまで省略可。)

このことと、点 P を通るという条件より、求める直線上の任意

の点を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、求める直線は媒介変数 $u \in \mathbf{R}$ を用い

て $\mathbf{x} = P + u(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ と表される。

よって、求める直線の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 7 - 3u \\ y = 8 + 6u \\ z = 9 - 3u \end{cases} \quad (u \in \mathbf{R})$$

である。

問 **B.5.11(a)**

(1)

$$|\mathbf{a}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1,$$

$$|\mathbf{a}_2| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1,$$

$$|\mathbf{b}_1| = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = 1,$$

$$|\mathbf{b}_2| = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^2} = 1$$

なので、ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ はいずれも単位ベクトルである。

また、

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0,$$

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{9} + \frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 0$$

なので、ベクトル $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ はそれぞれ直交する。

(2)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \\ \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{9} - \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \\ \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) - \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) (1)の結果により、 $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = |\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2| = 1$,
 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$ なので、問 B.5.10 の結果を用いると、
 $P\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, P\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$ を満たす直交行列は、

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{9}{9} & -\frac{9}{9} & \frac{9}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{9}{9} & -\frac{9}{9} & -\frac{9}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

この行列 P は、 $|P| = 1$ を満たす。

よって、求める直交行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

問 **B.5.13(a)**

$\mathbf{R}^3$ の基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ に Schmidt の直交化法を施すことにより、正規直交基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を求めると、

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{|\mathbf{a}_1|} \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_2 &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{|\mathbf{u}'_2|} \mathbf{u}'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_3 &= \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}_3 &= \frac{1}{|\boldsymbol{u}'_3|} \boldsymbol{u}'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。よって、求める正規直交基は

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

である。