数学基礎演習2・演習問題

—C.2—

[微積分2[公大]／解析2[市大]]

問 C.2.2(a), C.2.4(a), C.2.5(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

$\boxed{\text{多変数関数の連続性}}$

問C.2.1　地球の表面を $\mathbf{R}^3$ 内の原点中心半径 1 の球面と考え、点 $(0,0,1)$ を北極、xz 平面の $x \geq 0$ である半平面とこの球面との交わりを経度 0 度の子午線と見なすことにする。

(1)　このとき、北緯 30 度、東経 60 度の地点の $\mathbf{R}^3$ における座標を求めよ。

(2)　また、座標 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で表される地点の北緯と東経を求めよ。

問 C.2.2(a-c)　次の平面の方程式を求めよ。

(a)　x 軸正方向の傾き 2, y 軸正方向の傾き 3 で、点 $(4, 5, 6)$ を通る平面。

(b)　x 軸正方向の傾き 2 で、2 点 $(3, 4, 5)$, $(6, 7, 8)$ を通る平面。

(c)　3 点 $(2, 3, 4)$, $(5, 6, 7)$, $(8, 7, 6)$ を通る平面。

問 C.2.3　$\boldsymbol{v} = (p, q)$ は単位ベクトルとする。

(1)　平面 $z = 3x - 4y$ の、ベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の傾きを求めよ。

(2)　(1) の傾きが最大になる $\boldsymbol{v}$ と、そのときの傾きを求めよ。

(3)　(1) の傾きが 0 になる $\boldsymbol{v}$ を求めよ。

問C.2.4(a-b)　次の二次関数 $f(x, y)$ を、実対称行列の直交行列による対角化を用いた座標変換によって表せ。さらに、そのグラフの曲面の名前を答えよ。

(a) $f(x, y) = 6x^2 + 4xy + 9y^2$　　(b) $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$

問C.2.5(a-d)　次の関数の極限を求めよ。有限な極限が存在する場合はその値を、正(負)の無限大に発散する場合は、$+\infty$ ($-\infty$) と解答し、それ以外の場合は「存在しない」と解答せよ。

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4 + y^2}$　　(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$

解答例

問 C.2.2(a)　x 軸正方向の傾き 2, y 軸正方向の傾き 3 で、点 $(4, 5, 6)$ を通る平面の方程式は、

$$z - 6 = 2(x - 4) + 3(y - 5)$$

すなわち、$2x + 3y - z - 17 = 0$ である。

問 **C.2.4**(a)

$$f(x,y) = 6x^2 + 4xy + 9y^2 = (x \ \ y)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される。

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

とすると、A の固有多項式 $g_A(t)$ は、

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-6 & -2 \\ -2 & t-9 \end{vmatrix} = (t-5)(t-10)$$

となるので、A の固有値は $\lambda = 5, 10$ である。

$\lambda = 5$ とする。$(5E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間が A の固有値 5 の固有空間 $W(5; A)$ である。このとき $5E - A$ を簡約化すると

$$5E - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$(5E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(5; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbf{R} \right\}$$

$\lambda = 10$ とする。$(10E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間が A の固有値 10 の固有空間 $W(10; A)$ である。このとき $10E - A$ を簡約化すると

$$10E - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{（簡約化）}]{} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$(10E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

従って

$$W(10; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle|\, t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって$\dim(W(5;A))+\dim(W(10;A))=1+1=2$ となるので、A は対角化可能である。

$W(5;A)$ の基$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$を正規化すると$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$である。また$W(10;A)$ の基$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$を正規化すると $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$である。

$W(5;A)$ の各ベクトルと$W(10;A)$ の各ベクトルは直交するので$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$は $\mathbf{R}^2$ の正規直交基である。

よって、この $\mathbf{R}^2$ の正規直交基を列ベクトルにもつ行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと、P は直交行列で、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

P は直交行列なので、$P^{-1} = {}^tP$ であり、

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と直交変数変換すると

$$
\begin{aligned}
f = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \ &= \ {}^t(P\boldsymbol{x}')A(P\boldsymbol{x}') \ = \ {}^t\boldsymbol{x}'({}^tPAP)\boldsymbol{x}' \\
&= (x' \ \ y') \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= 5x'^2 + 10y'^2
\end{aligned}
$$

と表される。二次関数 $z = f(x', y') = 5x'^2 + 10y'^2$ のグラフの曲面は楕円放物面である。直交変数変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ に現れる 2×2 直交行列 P について $\det P = 1$ が成り立つので、この座標変換は回転移動による変換であり、もとの二次関数 $z = f(x, y)$ のグラフの曲面は楕円放物面である。

問 C.2.5(a)　直線 $y = 0$ に沿った極限を求めると、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

また、直線 $x = 0$ に沿った極限を求めると、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

　よって、2つの直線に沿った極限が異なるので、極限は「存在しない」。