

数学基礎演習2・演習問題

—C.3—

[微積分2[公大]／解析2[市大]]

問 C.3.2(a), C.3.4(a), C.3.5(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

偏微分、全微分

2変数関数 $f(x, y)$ に対し、 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ とする。 $\Delta f \equiv 0$ をみたす関数を調和関数と言う。

問 **C.3.1** 次の関数を二回まで偏微分せよ。また、調和関数であることを確かめよ。

$$\log(x^2 + y^2), \quad \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

問 C.3.2(a-e) 関数

$$(a) \quad f(x, y) = x^5 + ax^3y^2 + bxy^4$$

$$(b) \quad f(x, y) = x^4 + ax^3y + bx^2y^2 + cxy^3 + ay^4$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^5y + ax^3y^3 + bxy^5$$

$$(d) \quad f(x, y) = x^6 + ax^4y^2 + bx^2y^4 + cy^6$$

$$(e) \quad f(x, y) = \sin(x^2 + ay^2)\cosh(bxy)$$

が調和関数となるような実数 a, b, c の値を求めよ。

(参考 : $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\frac{d}{dt}\cosh t = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ である。)

問 **C.3.3** a, b は実数とする。関数 $f(x, y) = e^{ax} \sin by$ について、次の各問に答えよ。

(1) $f(x, y)$ を二回まで偏微分せよ。

(2) f が調和関数となるための、 a, b に関する必要十分条件を求めよ。

問 **C.3.4(a-d)** 次の曲面の各点における接平面の方程式を求めよ。

$$(a) \quad z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 6x - 14y \quad (x, y) = (0, 1)$$

$$(b) \quad z = x^3 + 12xy^2 - 12x \quad (x, y) = (2, 1)$$

$$(c) \quad z = -x^4 + 4xy - 2y^2 \quad (x, y) = (1, -1)$$

$$(d) \quad z = x^4 + y^4 - 4xy \quad (x, y) = (1, -1)$$

問 **C.3.5(a-l)** 次の各関数の原点 $(0, 0)$ での値は、いずれも 0 で与えられるものとする。このとき各関数は原点において

- [1] 連続
- [2] 偏微分可能
- [3] 全ての方向について方向微分可能
- [4] 全微分可能
- [5] C^1 級

であるか否か調べよ。

$$(a) \quad \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \quad \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

$$(e) \quad \frac{x^3y}{x^2 + y^2}$$

$$(g) \quad \frac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$$

$$(i) \quad \frac{x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(k) \quad (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(b) \quad \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$$

$$(d) \quad \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$(f) \quad \frac{y^4}{x^2 + y^2}$$

$$(h) \quad \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(j) \quad xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(l) \quad (x^3 + y^3) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

解答例

問 **C.3.2(a)** $f(x, y) = x^5 + ax^3y^2 + bxy^4$ を偏微分すると、

$$f_x(x, y) = 5x^4 + 3ax^2y^2 + by^4$$

$$f_{xx}(x, y) = 20x^3 + 6axy^2$$

$$f_y(x, y) = 2ax^3y + 4bxy^3$$

$$f_{yy}(x, y) = 2ax^3 + 12bxy^2$$

ここで、 $f(x, y)$ が調和関数となるのは、

$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ となるときで、

$$(20x^3 + 6axy^2) + (2ax^3 + 12bxy^2) = 0$$

すなわち、 $(20 + 2a)x^3 + (6a + 12b)xy^2 = 0$

よって、 $a = -10, b = 5$

問 **C.3.4(a)** $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 6x - 14y$ とすると

$$f_x(x, y) = 2x - 2y + 6$$

$$f_y(x, y) = -2x + 6y - 14$$

より $f(0, 1) = -11$, $f_x(0, 1) = 4$, $f_y(0, 1) = -8$ よって、曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(x, y) = (0, 1)$ における接平面の方程式は

$$z - (-11) = 4(x - 0) + (-8)(y - 1)$$

すなわち $z = 4x - 8y - 3$

問 **C.3.5(a)**

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$), $f(0, 0) = 0$ とする。

[1]

直線 $y = x$ に沿った極限を求めると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

また、直線 $y = -x$ に沿った極限を求めると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

よって、2つの直線に沿った極限が異なるので、極限

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ が存在しない。ゆえに $f(x, y)$ は原点において連続でない。

[2]

(i) x に関する偏微分可能性

$f(x, y)$ で $y = 0$ として得られる関数 $f(x, 0)(= 0)$ の $x = 0$ での微分可能性を調べると、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ なので、 $f(x, 0)$ は $x = 0$ で微分可能である。よって、 $f(x, y)$ は原点において x に関して偏微分可能である。

(ii) y に関する偏微分可能性

$f(x, y)$ で $x = 0$ として得られる関数 $f(0, y)(= 0)$ の $y = 0$ での微分可能性を調べると、 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$ なので、 $f(0, y) = 0$ は $y = 0$ で微分可能である。よって、 $f(x, y)$ は原点において y に関して偏微分可能である。

[3]

任意にベクトル $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ をとり、 $f(x, y)$ の原点における (a, b) 方向の方向微分可能性を確かめると、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 ab}{t^2(a^2 + b^2)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ab}{t(a^2 + b^2)}\end{aligned}$$

より、極限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t}$ が存在しないので、 $f(x, y)$ は原点において $(a, b) (\neq (1, 0), (0, 1))$ 方向に方向微分可能ではない。

よって、 $f(x, y)$ は原点において (x 軸、 y 軸と平行でない) 任意の方向について方向微分可能ではない。

[4]

[1] の結果により、 $f(x, y)$ は原点において連続でないので、 $f(x, y)$ は原点において全微分可能ではない。

[5]

(i) $f(x, y)$ の原点における連続性

[1] の結果により、 $f(x, y)$ は原点において連続でない。

(よって $f(x, y)$ は原点において C^1 級ではないと言えますが、ここでは、以下定義に戻って、 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ もまた原点において連続でないことを確かめておきます。)

(ii) $f_x(x, y)$ の原点における連続性

[2] での計算により、 $f_x(0, 0) = 0$ である。

$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ における $f(x, y)$ の偏微分係数 $f_x(x, y)$ を求めると、

$$f_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

である。

直線 $y = 0$ に沿った極限を求めると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

また、直線 $x = 0$ に沿った極限を求めると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f_x(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y}$$

この極限は存在しない。

よって、2つの直線に沿った極限が異なるので、極限

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y)$ が存在しない。ゆえに $f_x(x, y)$ は原点において連続でない。

(iii) $f_y(x, y)$ の原点における連続性

[2] での計算により、 $f_y(0, 0) = 0$ である。

$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ における $f(x, y)$ の偏微分係数 $f_y(x, y)$ を求めると、

$$f_y(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

である。

直線 $x = 0$ に沿った極限を求めると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f_x(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

また、直線 $y = 0$ に沿った極限を求めると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

この極限は存在しない。

よって、2つの直線に沿った極限が異なるので、極限

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y)$ が存在しない。ゆえに $f_x(x, y)$ は原点において連続でない。

以上より、 $f(x, y)$, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ のいずれも原点において連続ではないので、 $f(x, y)$ は原点において C^1 級ではない。