

数学基礎演習2・演習問題

—C.4—

[微積分2[公大]／解析2[市大]]

問 C.4.1(a)の一部, C.4.2(a), C.4.3(a), C.4.3(j) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

多変数関数の極値問題

問 **C.4.1(a-b)** 次の関数は $(x, y) = (0, 0)$ で

極大値をとる 極小値をとる 極値をとらない

のいずれであるか答えよ。

(a)	$4x^2 + 3y$	$4x^2 + 3y^2$	$4x^2 - 3y^2$
	$-4x^2 + 3y$	$-4x^2 + 3y^2$	$-4x^2 - 3y^2$
(b)	$3x + 4y^2$	$3x^2 + 4y^2$	$-3x^2 + 4y^2$
	$3x - 4y^2$	$3x^2 - 4y^2$	$-3x^2 - 4y^2$

問 **C.4.2**(a-b)

(a)

(b)

$$f(x, y) = x^2y + 3y^3 - 9y, \quad x^2y - y^2 - 4y$$

とする。

(1) $f(x, y)$ の偏導関数を求めよ。

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (1, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

(3) 曲面 $z = f(x, y)$ の接平面が水平(つまり x 軸正方向の傾きも、 y 軸正方向の傾きも、共に 0) となるような点を求めよ。

(4) $f(x, y)$ の 2 次偏導関数を求めよ。さらに

$$f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

を求めよ。

(5) (3) で求めた各点における f の値は極値か否か判定せよ。
(「極大値」「極小値」「極値ではない」の中から選んで解答せよ。)

問 **C.4.3(a-m)** a は実数とする。次の関数の極値を求めよ。

(a) $-3x^2 + 2xy - 3y^2 + 2$

(b) $x^3 + 12xy^2 - 12x$

(c) $12x^2y + y^3 - 12y$

(d) $4x^3 + 3xy^2 - 12x$

(e) $-x^4 + 4xy - 2y^2$

(f) $x^4 + y^4 - 4xy$

(g) $x^3 + axy + y^2$

(h) $x^3 + xy + ay^2$

(i) $e^x + e^{-x} + y^3 - 3y$

(j) $\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$

(k) $\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$

(l) $\frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$

(m) $\frac{1}{x^4 + y^2 + 1}$

問 **C.4.4** g は C^4 級の 1 変数関数とし、 g' と g'' は共通零点を持たないとする。2 変数関数 $f(x_1, x_2) = g(x_1) - g''(x_1)x_2^2$ は極値を持たないことを示せ。

問 **C.4.5** g は C^4 級の 1 変数関数とし、 g' は零点を持たないとする。 n は自然数とする。2 変数関数 $f(x_1, x_2) = g(x_1) + g''(x_1)x_2^n$ は極値を持たないことを示せ。

解答例

問 **C.4.1(a)** の一部

$f(x, y) = 4x^2 + 3y$ とおく。一次の偏導関数を求めると、

$$f_x(x, y) = 8x, \quad f_y(x, y) = 3$$

よって、 $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 3 \neq 0$ なので、 $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で極値をとらない。

問 C.4.2(a)

(1) $f(x, y)$ の偏導関数は

$$f_x(x, y) = 2xy,$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 9y^2 - 9$$

である。

(2) $f(1, 1) = -5, f_x(1, 1) = 2, f_y(1, 1) = 1$ より、曲面 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (1, 1)$ における接平面の方程式は、

$$z - (-5) = 2(x - 1) + (y - 1)$$

すなわち $z = 2x + y - 8$ である。

(3) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 (x, y) における接平面の x 軸正方向の傾きは $f_x(x, y)$ 、 y 軸正方向の傾きは $f_y(x, y)$ なので、接平面が水平となるのは、これら2方向の傾きが共に 0 になるとき、すなわち、 (x, y) が連立方程式

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 9y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

を満たすときである。

これを解くと、 $(x, y) = (0, 1), (0, -1), (3, 0), (-3, 0)$ である。

よって、求める点は $(x, y) = (0, 1), (0, -1), (3, 0), (-3, 0)$

(4) $f(x, y)$ の 2 次偏導関数は、

$$f_{xx}(x, y) = 2y,$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2x,$$

$$f_{yy}(x, y) = 18y$$

である。よって、

$$f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = -4x^2 + 36y^2$$

である。

(5) 判別式 D を(4)で求めた式、すなわち

$$D = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = -4x^2 + 36y^2$$

とする。

$(x, y) = (0, 1)$ のとき $D = 36 > 0$ であり、 $f_{xx}(0, 1) = 2 > 0$ より f は $(0, 1)$ で極小値 -6 をとる。

$(x, y) = (0, -1)$ のとき $D = 36 > 0$ であり、
 $f_{xx}(0, -1) = -2 < 0$ より f は $(0, -1)$ で極大値 12 をとる。

$(x, y) = (3, 0)$ のとき $D = -36 < 0$ なので、 f は $(3, 0)$ で極値をとらない。

$(x, y) = (-3, 0)$ のとき $D = -36 < 0$ なので、 f は $(-3, 0)$ で極値をとらない。

以上より、(f の値は) $(0, 1)$ で極小値、 $(0, -1)$ で極大値、 $(3, 0)$ で極値ではない、 $(-3, 0)$ で極値ではない。

問 **C.4.3(a)**

$f(x, y) = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 2$ とする。偏導関数を求めると、

$$f_x(x, y) = -6x + 2y, \quad f_y(x, y) = 2x - 6y$$

である。 f が (a, b) で極値をもつとすると、

$f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ をみたす。したがって、連立1次方程式

$$\begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$$

の解が、 f が極値をとる点の候補の点である。この連立1次方程式を解くと、 $x = 0, y = 0$ である。よって、極値をとる点の候補は $(0, 0)$ のみである。

ここで、 $f(x, y)$ の2次偏導関数を求めると、

$$f_{xx}(x, y) = -6,$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2,$$

$$f_{yy}(x, y) = -6$$

なので、判別式 D を

$$D = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = 32$$

とおくと、点 $(0, 0)$ において、 $D = 32 > 0$ で、 $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ なので、 f は点 $(0, 0)$ で極大値 2 をとる。

問 **C.4.3(j)**

$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ とする。偏導関数を求めると、

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

である。 f が (a, b) で極値を持つとすると、 $f_x(a, b) = 0$,
 $f_y(a, b) = 0$ をみたす。これをみたすのは $(a, b) = (0, 0)$ である。

ここで、 $f(x, y)$ の2次偏導関数を求めると、

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{2(3x^2 - y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3}, \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = \frac{8xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3}, \\f_{yy}(x, y) &= \frac{2(-x^2 + 3y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.\end{aligned}$$

判別式 D を

$$\begin{aligned}D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 \\&= \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^6} \\&\quad \times \{4(3x^2 - y^2 - 1)(-x^2 + 3y^2 - 1) - 64x^2y^2\}\end{aligned}$$

とする。 $D(0, 0) = 4 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$ より、 f は点 $(0, 0)$ で極大値 1 をとる。