

数学基礎演習2・演習問題

—C.5—

[微積分2[公大]／解析2[市大]]

問 C.5.3(a), C.5.4(a), C.5.5(a), C.5.6(a) は(TAによる)解答例付きで、発表対象外です。

条件付き極値問題

問C.5.1

$$f(x, y) = xy,$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2y,$$

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

とする。2変数の二次関数 $g(x, y)$ は

$$g(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1$$

と変形できるので、曲線 $g(x, y) = 0$ は、点 $(0, 1)$ を中心とし、半径 1 の円周である。以下、この円周上での(すなわち条件 $g(x, y) = 0$ の下での) 2変数の二次関数 $f(x, y)$ の極値問題を考える。

(1) 連立方程式 $F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$ を満たす点 (x, y) を求めよ。

(2) (1) で求めた各点における $f(x, y)$ の値を求めよ。

(3) (1) で求めた点を、円周 $g(x, y) = 0$ 上 x 座標の小さい順に並べ、 $f(x, y)$ の値の増減を調べることにより、極値か否か判定せよ。(「極大値」「極小値」「極値ではない」の中から選んで解答せよ。)

問 C.5.2

$$f(x, y) = x^2y + 3y^3 - 9y,$$

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 16y - 9,$$

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

とする。

(1) 曲線 $g(x, y) = 0$ は、楕円である。その中心、長径、短径を求めよ。

以下、この楕円上での(すなわち条件 $g(x, y) = 0$ の下での) 2 変数の三次関数 $f(x, y)$ の極値問題を考える。

(2) $f(x, y), g(x, y)$ の導関数を求めよ。

(3) 連立方程式 $F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$ を満たす点 (x, y) を求めよ。

(4) (3) で求めた各点における $f(x, y)$ の値を求めよ。

(5) (3) で求めた点を、楕円 $g(x, y) = 0$ 上左回りに並べ、 $f(x, y)$ の値の増減を調べることにより、極値か否か判定せよ。
(「極大値」「極小値」「極値ではない」の中から選んで解答せよ。)

問 **C.5.3**(a-i) a, b は正の実数とする。次の関数の各条件の下での極値を求めよ。

(a) $-3x^2 + 2xy - 3y^2 + 2$ 条件 $x^2 + y^2 = 2$ [問 C.4.3 (a) の続き]

(b) $x^3 + 12xy^2 - 12x$ 条件 $x^2 + y^2 = 1$ [問 C.4.3 (b) の続き]

(c) $12x^2y + y^3 - 12y$ 条件 $x^2 + y^2 = 1$ [問 C.4.3 (c) の続き]

(c') $12x^2y + y^3 - 12y$ 条件 $x^2 + y^2 = 100$ [問 C.4.3 (c) の続き]

(d) $4x^3 + 3xy^2 - 12x$ 条件 $x^2 - 3x + y^2 = 4$ [問 C.4.3 (d) の続き]

(e) $-x^4 + 4xy - 2y^2$ 条件 $x^2 + y^2 = 2$ [問 C.4.3 (e) の続き]

(f) $x^4 + y^4 - 4xy$ 条件 $x^2 + y^2 = 2$ [問 C.4.3 (f) の続き]

(g) $x + y$

(h) $x + y$

(i) xy

条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

条件 $x^4 + y^4 + x^2 + xy + y^2 = 2$

条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

重積分

問 **C.5.4**(a-h) a, b は正の定数とする。次の重積分を計算せよ。

(a) $\iint_A (x + y)^2 dx dy$ $A : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$

(b) $\iint_A \sqrt{x + y} dx dy$ $A : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$

(c) $\iint_A xy dx dy$ $A : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$

(d) $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$ $A : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$

(e) $\iint_A \sqrt{x} dx dy$ $A : x^2 + y^2 \leq x$

(f) $\iint_A (x + y) dx dy$ $A : \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x$

(g) $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$ $A : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

(h) $\iint_A x^3 y^5 dx dy$ $A : x \leq y \leq 16x, xy \leq 2$

ヒント：次の変数変換を用いて計算せよ。

$$(f) \quad (x, y) = (\sqrt{3}r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$(g) \quad (x, y) = (4r \cos \theta, 3r \sin \theta)$$

$$(h) \quad (x, y) = (re^{-t}, re^t)$$

問 **C.5.5**(a-c) a, b は共に正の定数で、 $a < b$ とする。次の曲面の面積を計算せよ。

(a) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ の内、直円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ の内側にある部分。

(b) 放物面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ の内、 xy 平面より上にある部分。

(c) 曲面 $z = x^2 - y^2$ ($x^2 + y^2 \leq a^2, -x \leq y \leq x$)

問 **C.5.6**(a-f) a, b, c はいずれも正の定数（特に、(a)では $a < b$, (e)では $a < c, b < c$ ）とする。次の閉領域の体積を求めよ。

$$(a) \quad \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$$

$$(b) \quad \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$$

$$(c) \quad \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2\}$$

$$(d) \quad \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

$$(e) \quad \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, z \leq ax + c, z \leq -bx + c\}$$

$$(f) \quad \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a, -x \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}$$

解答例

問C.5.3(a)

$$f(x, y) = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 2,$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2,$$

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

とする。このとき、

$$F_x(x, y, \lambda) = -(6 + 2\lambda)x + 2y,$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 2x - (6 + 2\lambda)y,$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 2$$

なので、連立方程式

$$F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

を満たす点 (x, y) を求める。

$$\begin{cases} -(6 + 2\lambda)x + 2y = 0 & \cdots [1] \\ 2x - (6 + 2\lambda)y = 0 & \cdots [2] \\ -x^2 - y^2 + 2 = 0 & \cdots [3] \end{cases}$$

なので、[1]+[2] より、 $-(4 + 2\lambda)(x + y) = 0$

よって、 $\lambda = -2$ または $x + y = 0$

$\lambda = -2$ のとき、[1],[2] より $x - y = 0$ これと [3] より、

$$(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$$

$x + y = 0$ のとき、 $x + y = 0$ と [3] より、

$$(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$$

$(x, y) = (1, -1)$ のとき、[1] より $\lambda = -4$ 、これは [2] も満たす。

$(x, y) = (-1, 1)$ のとき、[1] より $\lambda = -4$ 、これは [2] も満たす。

よって、連立方程式

$$F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

を満たす点 (x, y) は

$$(x, y) = (1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$$

であり、この4点が、 $f(x, y)$ が条件 $g(x, y) = 0$ の下での極値をとる候補である。

ここで、この4点を円周 $g(x, y) = 0$ すなわち $x^2 + y^2 = 2$ 上を点 $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ から始めて左回りに並べると、 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ で、それぞれの点での $f(x, y)$ の値は

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= -2, & f(-1, 1) &= -6, \\ f(-1, -1) &= -2, & f(1, -1) &= -6 \end{aligned}$$

となる。

隣同士を結ぶ円弧上では極値をとらないので、この関数の値は円弧状では単調増加か単調減少しかない。 $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ から始めて円周 $g(x, y) = 0$ 上を左回りで一周したときの、関数 $f(x, y)$ の増減を調べると、 $f(\sqrt{2}, 0) = -4$ なので、増加、減少、増加、減少、増加、で一周するので、 $f(x, y)$ は条件 $g(x, y) = 0$ すなわち $x^2 + y^2 = 2$ の下で

点 $(1, 1)$ で極大値 -2 、

点 $(-1, 1)$ で極小値 -6 、

点 $(-1, -1)$ で極大値 -2 、

点 $(1, -1)$ で極小値 -6

をとる。

問 **C.5.4**(a)

$$\begin{aligned}\int \int_A (x + y)^2 dx dy &= \int_0^b \left\{ \int_0^a (x + y)^2 dx \right\} dy \\&= \int_0^b \left\{ \left[\frac{1}{3} (x + y)^3 \right]_{x=0}^a \right\} dy \\&= \frac{1}{3} \int_0^b \{ (y + a)^3 - y^3 \} dy \\&= \frac{1}{3} \int_0^b (3ay^2 + 3a^2y + a^3) dy \\&= \frac{1}{3} \left[ay^3 + \frac{3}{2}a^2y^2 + a^3y \right]_{y=0}^b \\&= \frac{1}{6}ab(2a^2 + 3ab + 2b^2).\end{aligned}$$

別解：

$$\begin{aligned}\int \int_A (x+y)^2 dx dy &= \int_0^b \left\{ \int_0^a (x^2 + 2xy + y^2) dx \right\} dy \\&= \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy + 2 \int_0^a x dx \int_0^b y dy + \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy \\&= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a [y]_0^b + 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^b + [x]_0^a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b \\&= \frac{a^3}{3} b + 2 \cdot \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} + a \frac{b^3}{3} \\&= \frac{1}{6} ab(2a^2 + 3ab + 2b^2).\end{aligned}$$

問 **C.5.5(a)**

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ の内、直円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ の内側にある部分の曲面の面積を求める。

$$z = \pm \sqrt{b^2 - (x^2 + y^2)}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$$

なので、

$$f(x, y) = \sqrt{b^2 - (x^2 + y^2)}$$

とすると、求める面積は、

$$8 \int_E \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

ここで、

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

である。

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{b^2 - (x^2 + y^2)}}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{b^2 - (x^2 + y^2)}}$$

なので、

$$8 \int_E \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

$$= 8b \int_E \frac{1}{\sqrt{b^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy$$

$$x = br \cos \theta, \quad y = br \sin \theta$$

とすると、

$$0 \leq r \leq \frac{a}{b}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(さらに

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b \cos \theta & -br \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = b^2 r$$

より)

$$dxdy = b^2 r \, dr d\theta$$

である。

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 8b \int_0^{a/b} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{b\sqrt{1-r^2}} b^2 r \, d\theta dr \\
&= 4\pi b^2 \int_0^{a/b} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr \\
&= 4\pi b^2 \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^{a/b} \\
&= 4\pi (b^2 - b\sqrt{b^2 - a^2})
\end{aligned}$$

問 **C.5.6(a)**

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\} \quad (a < b)$$

の体積を求める。

$$\int_D dx dy dz = 8 \int_E \sqrt{b^2 - (x^2 + y^2)} dx dy$$

ここで、

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

である。

$$x = br \cos \theta, \quad y = br \sin \theta$$

とすると、

$$0 \leq r \leq \frac{a}{b}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

(さらに

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b \cos \theta & -br \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = b^2 r$$

より)

$$dxdy = b^2 r \, dr d\theta$$

である。

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 8 \int_0^{a/b} \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 - b^2 r^2} \, b^2 r \, d\theta dr \\
&= 4\pi b^3 \int_0^{a/b} \sqrt{1 - r^2} \, r \, dr \\
&= -2\pi b^3 \left[\frac{2}{3} (1 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a/b} \\
&= \frac{4\pi}{3} \{ b^3 - (b^2 - a^2)^{3/2} \}
\end{aligned}$$

(通常の極座標を用いて

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

とすると、

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

さらに

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

より

$$dxdy = r \, drd\theta$$

となり

$$\begin{aligned}
 (\text{C.5.5(a) の曲面積}) &= 8b \int_0^a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{b^2 - r^2}} r \, d\theta dr \\
 &= 4\pi b \int_0^a \frac{r}{\sqrt{b^2 - r^2}} \, dr \\
 &= 4\pi b \left[-\sqrt{b^2 - r^2} \right]_0^a \\
 &= 4\pi(b^2 - b\sqrt{b^2 - a^2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{C.5.6(a) の体積}) &= 8 \int_0^a \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 - r^2} \, r \, d\theta dr \\
 &= 4\pi \int_0^a \sqrt{b^2 - r^2} \, r \, dr \\
 &= -2\pi \left[\frac{2}{3}(b^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^a \\
 &= \frac{4\pi}{3} \{b^3 - (b^2 - a^2)^{3/2}\}
 \end{aligned}$$

で、同じ計算結果を得ます。