数理科学B・講義ノート

$\boxed{\text{第３回}}$

(2025年 4月25日(金)配信分)

§2. 極小曲面と変分問題

§2.1. 変分問題

$f:(a,b)\to\mathbf{R}$ は C^1 級関数とする。$f(x)$ が $x=c$ で最小値 $f(c)$ をとるとき、$f'(c)=0$ が成り立つ。

$f:D(\subset\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ は C^1 級関数とする。$f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ で最小値 $f(\boldsymbol{c})$ をとるとき、任意のベクトル $\boldsymbol{h}$ に対し、

$$df_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{h})=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(f(\boldsymbol{c}+\epsilon\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{c}))=\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}f(\boldsymbol{c}+\epsilon\boldsymbol{h})=0$$

が成り立つ、すなわち全ての方向に関して、方向微分が 0 になる。

さて、H は、ある条件をみたす関数または写像全体の空間で、$I : H \to \mathbf{R}$ は汎関数とする。(この H は平均曲率とは別物。) $I(u)$ が最小値をとる所では、方向微分の意味で $I'(u) = 0$ が成り立つはずである。

例えば、H は境界 ∂D の温度を指定された閉領域 $\overline{D}$ の熱分布全体、$I(u)$ は一階微分のノルムの二乗の積分とする。$u \in H$ が定常状態のとき、$I(u)$ は最小値（極小値）をとり、$I'(u) = 0$ が成り立つと考えられる。

ここで、$\dim H = \infty$ の場合の方向微分（第一変分） $I'(u)$ は、どのように考えればよいだろうか？

h は境界での値が 0 である関数とし、$u + \epsilon h$ により、境界の温度が一定な u の変分を考えると、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} I(u+\epsilon h) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int_{\overline{D}} |\nabla (u+\epsilon h)|^2 d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int_{\overline{D}} (|\nabla u|^2 + 2\epsilon \nabla u \cdot \nabla h + \epsilon^2 |\nabla h|^2) d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} (|\nabla u|^2 + 2\epsilon \nabla u \cdot \nabla h + \epsilon^2 |\nabla h|^2) d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} 2\nabla u \cdot \nabla h d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} 2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} h \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} h \right\} d\boldsymbol{x} \\
&= 2 \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} h ds - 2 \int_{\overline{D}} \Delta u \cdot h d\boldsymbol{x} \\
&= -2 \int_{\overline{D}} \Delta u \cdot h d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

この意味で $I'(u) = 0$ であるとは、$\Delta u = 0$ を満たすことだと考えられる。ちなみに、このような u を調和関数と呼ぶ。

§2.2. 測地線

$D \subset \mathbf{R}^2$ は有界領域、$F : \overline{D} \to \mathbf{R}^3$ は C^2 級写像とする。
$F_x(x,y) \times F_y(x,y) \neq \mathbf{0}$ $(\forall (x,y) \in \overline{D})$ のとき、$M := F(\overline{D})$ は $\mathbf{R}^3$ 内の C^2 級曲面になる。

M 上の単位法ベクトル場は、次式により与えられる。

$$G(P) := \frac{1}{||F_x(x,y) \times F_y(x,y)||} F_x(x,y) \times F_y(x,y) \qquad (\forall P = F(x,y) \in M)$$

$G : M \to \mathbf{R}^3$ を M の Gauss 写像と呼ぶ。

$X : [a, b] \to M$ は曲面 M 上の C^2 級曲線の媒介変数表示とする。特に $||X'(t)|| = 1$ $(\forall t \in [a, b])$ すなわち弧長媒介変数表示を仮定しておく。曲線 X の弧長は次式で与えられる。

$$L(X) \ = \ \int_a^b ||X'(t)|| dt = b - a$$

ここで、$X'(t), G(X(t)) \times X'(t)$ は接平面 $T_{X(t)}M$ の正規直交基を、$G(X(t)), X'(t), G(X(t)) \times X'(t)$ は接空間 $T_{X(t)}\mathbf{R}^3$ の正規直交基を、それぞれなすことに注意する。

M 上の曲線 $X(t)$ の測地曲率は次式で与えられる。

$$\sigma(t) \ := \ |G(X(t)), X'(t), X''(t)| \ = \ \langle G(X(t)) \times X'(t), X''(t) \rangle$$

$P, Q \in M$ とし、
$X(t)$ は $X(a) = P$ と $X(b) = Q$ を結ぶ曲線とする。
$X(t)$ の変分として、C^2 級写像 $X : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to M$ ($\delta > 0$) で、次の条件を満たすものを考える。

$$X(t, 0) = X(t) \qquad (\forall t \in [a, b]),$$

$$X(a, \epsilon) = X(a), \quad X(b, \epsilon) = X(b) \qquad (\forall \epsilon \in (-\delta, \delta))$$

このとき、特に次が成り立つ。

$$X_\epsilon(a, \epsilon) \ = \ X_\epsilon(b, \epsilon) = \mathbf{0} \qquad (\forall \epsilon \in (-\delta, \delta))$$

ϵ を固定するとき、$X(\cdot,\epsilon):[a,b]\to M$, $t\mapsto X(t,\epsilon)$ は $X=X(\cdot,0)$ と両端を同じくする C^2 級曲線で、その長さは次式で与えられる。

$$L(X(\cdot,\epsilon)) \;=\; \int_a^b ||X_t(t,\epsilon)||dt$$

さて、 $X=X(\cdot,0)$ が最短線のとき、$L(X(\cdot,\epsilon))$ の第一変分は消える、すなわち次が成り立つはずである。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) \;=\; 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int_a^b ||X_t(t,\epsilon)||dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \langle X_t(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle^{1/2} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2}\langle X_t(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle^{-1/2} \cdot 2\langle X_{t\epsilon}(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle|_{\epsilon=0} dt \\
&= \int_a^b ||X'(t)||^{-1}\langle X_{t\epsilon}(t,0), X'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \langle X_{\epsilon t}(t,0), X'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \{\langle X_\epsilon(t,0), X'(t)\rangle_t - \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle\} dt \\
&= \langle X_\epsilon(b,0), X'(b)\rangle - \langle X_\epsilon(a,0), X'(a)\rangle - \int_a^b \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle dt \\
&= -\int_a^b \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle dt
\end{aligned}
$$

$G(X(t)), X'(t), G(X(t)) \times X'(t)$ は $T_{X(t)}\mathbf{R}^3$ の正規直交基より、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
X''(t) &= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle G(X(t)) + \langle X'(t), X''(t)\rangle X'(t) \\
&\qquad + \langle G(X(t)) \times X'(t), X''(t)\rangle G(X(t)) \times X'(t) \\
&= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle G(X(t)) + 0 \cdot X'(t) + \sigma(t) G(X(t)) \times X'(t) \\
&= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle G(X(t)) + \sigma(t) G(X(t)) \times X'(t)
\end{aligned}
$$

$X(t,\cdot)$ は M 上の曲線より、$X_\epsilon(t,0) \in T_{X(t)}M$ で、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle &= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle \langle X_\epsilon(t,0), G(X(t))\rangle \\
&\qquad +\sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t)) \times X'(t)\rangle \\
&= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle \cdot 0 + \sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t)) \times X'(t)\rangle \\
&= \sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t)) \times X'(t)\rangle
\end{aligned}$$

よって、次を得る。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) = -\int_a^b \sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t)) \times X'(t)\rangle dt$$

$\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ は C^0 級関数で、$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $\varphi(t) > 0$ $(\forall t \in (a,b))$ を満たすものとする。$X(t,\epsilon)$ として、$X_\epsilon(t,0) = \varphi(t)\sigma(t)G(X(t)) \times X'(t)$ を満たすものをとれば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) &= -\int_a^b \sigma(t) \cdot \varphi(t)\sigma(t)\langle G(X(t)) \times X'(t), G(X(t)) \times X'(t)\rangle dt \\
&= -\int_a^b \varphi(t)\sigma(t)^2 ||G(X(t)) \times X'(t)||^2 dt \\
&= -\int_a^b \varphi(t)\sigma(t)^2 dt
\end{aligned}$$

この積分の値は、$\varphi(t)$ の取り方によらず、一般に 0 以下であるから、選んだ変分により、測地曲率に比例するよう余法ベクトル場方向に変形すれば、曲線の長さが短くなる。

$\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}L(X(\cdot,\epsilon))=0$ であることは、$\varphi(t)\sigma(t)^2=0\ (\forall t\in[a,b])$ であることと同値であるから、結局 $\sigma(t)=0\ (\forall t\in[a,b])$ であることと同値になる。

$X(t,\epsilon)$ の選び方によらず、第一変分が 0 であることは、$\sigma(t)=|G(X(t)),X'(t),X''(t)|=0$ （測地線の方程式）を満たすことと同値で、$X(t)$ が最短測地線のとき、これを満たすが、一般には最短とは限らない。

$X(t,\epsilon)$ が C^3 級のとき、$L(X(\cdot,\epsilon))$ の第二変分（二次微分係数）が >0 であれば、$X(t)$ は少なくとも $L(X)$ の極小値をとると判定できる。

これは端点が十分近ければＯＫである。