大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2023年度春入学 一般選抜
筆記試験（専門基礎科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

(1) 数学専攻の専門基礎分野の問題は 1 ページ〜2 ページにあります.

(2) 4 題全てに解答して下さい.

(3) 解答用紙は，8 枚配付します.

(4) 解答は，<u>問題ごとに 2 枚の解答用紙を用い</u>，枠内に記入して下さい．解答用紙の<u>全てに</u>，受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，<u>問題ごとに</u>何枚中の何枚目かを記入して下さい.

(5) 試験時間は，9:30〜12:00 です.

(6) 解答用紙は，白紙を含め全て提出して下さい.

専門基礎分野の問題（数学専攻）

次の数学 I-1 〜 数学 I-4 の問題全てに解答せよ．

$\boxed{\text{数学 I-1}}$ 次の $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$$

を考える．V を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5$ が生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．次の各問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次従属であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ は V を生成することを示せ．

(3) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4)$ は V の基底であることを示せ．

(4) $f : V \to V$ を $f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1,\ f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3,\ f(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{v}_5$ を満たす線形写像とする．このとき，f の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4)$ に関する表現行列 A，すなわち，

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & f(\boldsymbol{v}_2) & f(\boldsymbol{v}_4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_4\end{pmatrix} A$$

を満たす行列 A を求めよ．

(5) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_5)$ は V の基底であることを示せ．

$\boxed{\text{数学 I-2}}$ 実数を成分とする行列 A を以下のように定める．

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ．

(1) 実数を成分とする 3 次正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものを一つ求めよ．

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} a^n A^n$ が存在して, それが零行列ではないような実数 a をすべて求めよ．ここに, 実数を成分とする 3 次正方行列の列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ (各 n に対して, $B_n = (b_{ij}(n))$ は 3 次の正方行列) と実数を成分とする 3 次正方行列 $B = (\beta_{ij})$ に対して, B が $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限であるとは, すべての i, j $(1 \le i, j \le 3)$ に対して, 数列 $\{b_{ij}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 β_{ij} に収束することをいい, このとき, $B = \lim_{n\to\infty} B_n$ と表す.

$\boxed{\text{数学 I-3}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\cos x-\frac{1+ax^2}{1+x^2}\right)$ が収束するように定数 a を定め，そのときの極限値を求めよ．

(2) R を正の実数とし，$D_R=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq R^2\}$ とする．2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$ の値を，R を用いて表せ．

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ を満たすとする．関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で一様連続ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(f(a_n)-f(b_n))=0$ が成り立つことを示せ．

(4) (3) において $f(x)$ の条件を「$\mathbb{R}$ で一様連続」から「$\mathbb{R}$ で連続」におきかえても主張は正しいか？　正しいならば証明し，正しくないならば反例を与えよ．

$\boxed{\text{数学 I-4}}$ $f(x,t)$ は $C^1([0,\infty)\times[0,\infty))$ に属する関数とする．また，広義積分

$$F(t)=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \quad \text{および} \quad G(t)=\int_0^\infty f(x,t)dx$$

は $t\geq 0$ において常に収束し，かつ，この収束は一様であるとする．$t>0$ に対して

$$\int_0^t F(s)ds=\int_0^\infty\left(\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)ds\right)dx$$

が成立すること（積分の順序交換が可能であること）を用いて，次の各問いに答えよ．

(1) $t>0$ に対して，$G'(t)=F(t)$ が成り立つことを示せ．

以下では $f(x,t)=e^{-x^2}\cos tx$ とする．

(2) $t>0$ に対して，$G'(t)$ を t と $G(t)$ を用いて表せ．

(3) $G(0)$ の値を求めよ．

(4) $G(t)$ を，t を用いて表せ．