

大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2023年度春入学 一般選抜
筆記試験（専門科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

- (1) 数学専攻の専門分野の問題は1ページ～7ページにあります。
- (2) 数学II-1～数学II-16の問題の中から3題を選択して解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、6枚配付します。
- (4) 解答は、問題ごとに2枚の解答用紙を用い、枠内に記入して下さい。解答用紙の全てに、受験番号、氏名および問題番号を記入して下さい。また、問題ごとに何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (5) 試験時間は、13:00～15:30です。
- (6) 解答用紙は、白紙を含め全て提出して下さい。

専門分野の問題（数学専攻）

次の数学 II-1 ～数学 II-16 の問題の中から 3 題を選択して解答せよ（4 題以上解答しないこと）．解答用紙に選択した問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

数学 II-1 $M_3(\mathbb{C})$ で、複素数係数の 3 次正方行列全体を表すものとし、これを $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす． $W = \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$ とおく．ただし、 $\text{tr}(X)$ は X のトレース、すなわち、 X の対角成分の和を表すものとする．

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．次の各問いに答えよ．

- (1) W はベクトル空間 $M_3(\mathbb{C})$ の部分空間となることを示し、その次元を求めよ．
- (2) 各 $A \in W$ に対し、 $f_A(X) = AX - XA$ ($X \in W$) とおく． f_A は W の線型変換、すなわち、 W から W への線型写像となることを示せ．
- (3) 線型変換 f_H の核 $\text{Ker } f_H$ を求めよ．
- (4) 線型変換 f_H の固有値で正の実数であるものをすべて求めよ．また、それぞれの固有値に対する固有空間を求めよ．

数学 II-2 群 G に対して $Z(G) = \{g \in G \mid gg' = g'g, \forall g' \in G\}$ とおく． $\text{Aut}(G)$ を G の自己同型群、すなわち、 G から G への同型写像全体が写像の合成に関してなす群とする． $g \in G$ に対して、写像 $i_g : G \rightarrow G$ を $i_g(x) = gxg^{-1}$ で定める．さらに、写像 $I : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ を $I(g) = i_g$ で定める．次の各問いに答えよ．

- (1) i_g は同型写像であることを示せ．
- (2) I は準同型写像であることを示せ．
- (3) $\text{Ker } I = Z(G)$ を示せ．ここで、 $\text{Ker } I$ は写像 I の核を表す．
- (4) 写像 I の像 $\text{Im } I$ は $\text{Aut}(G)$ の正規部分群であることを示せ．

(5) H を群とし, 準同型写像 $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$ に対して, 直積集合 $G \times H$ に積を

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1\phi(h_1)(g_2), h_1h_2), \quad g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$$

と定めて定義される群を $G \rtimes_{\phi} H$ と表す. $G \rtimes_I G$ は直積群 $G \times G$ と同型であることを示せ.

数学 II-3 可換環 R の元 a に対して, a が生成する R の単項イデアルを (a) で表す. $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}[x, y]$ はそれぞれ $\mathbb{Z}$ 上の 1 変数多項式環, 2 変数多項式環を表す. 次の各問いに答えよ.

- (1) $\mathbb{Z}[x]/(1-x)$ と $\mathbb{Z}$ は環として同型であることを示せ.
- (2) $\mathbb{Z}[x]/(1-2x)$ は整域であることを示せ.
- (3) $\mathbb{Z}[x]/(1-2x)$ と $\mathbb{Z}[x]/(1-4x)$ は環として同型であることを示せ.
- (4) $\mathbb{Z}[x]/(1-2x)$ と $\mathbb{Z}$ は環として同型ではないことを示せ.
- (5) 環 $\mathbb{Z}[x, y]/(1-xy)$ において, $x+y$ の同値類は, 積に関する逆元を持たないことを示せ.

数学 II-4 p を素数, h を 2 以上の整数 とし, F を $q = p^h$ 個の元からなる有限体とする. $x \in F$ に対して, $t(x) = x + x^p + x^{p^2} + \cdots + x^{p^{h-1}}$ と定める. 次の各問いに答えよ.

- (1) $a \in F$ に対して, F 上の写像 φ を $\varphi(a) = a^p$ と定めると, φ は全単射環準同型写像であることを示せ.
- (2) $a \in F$ に対して, $t(a) \in \mathbb{F}_p$ が成り立つことを示せ. ここで $\mathbb{F}_p (\subset F)$ は F の素体とする.
- (3) $a, b \in F$ に対して, $t(a+b) = t(a) + t(b)$ が成り立つことを示せ.
- (4) $a \in F$ に対して, $t(a) = 0$ が成り立つための必要十分条件は, $a = b^p - b$ を満たす $b \in F$ が存在することであることを示せ.

数学 II-5 集合 P と直積集合 $P \times P$ の部分集合 R が与えられているとき, $(x, y) \in R$ であることを $x \triangleleft y$ で表す. また, $x \in P$ に対して $[x] = \{y \in P \mid x \triangleleft y\}$ とおいて, P の部分集合の族 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O} = \{O \subset P \mid x \in O \text{ ならば } [x] \subset O\} \cup \{\emptyset\}$ で定義する. R が次の 2 つの条件

- (i) $x \in P$ ならば $x \triangleleft x$. (ii) $x, y, z \in P$ が $x \triangleleft y$ かつ $y \triangleleft z$ を満たせば $x \triangleleft z$.
- を満たすとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $\mathcal{O}$ は P の位相であることを示せ.

以下では位相空間 $(P, \mathcal{O})$ を考える.

(2) 任意の $x \in P$ に対し, $[x] \in \mathcal{O}$ を示せ.

(3) P の部分集合 A が閉集合であるためには「 $[x] \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \in A$ 」が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(4) A を P の閉集合とする. A が $(P, \mathcal{O})$ の部分空間としてコンパクトであることと, P の有限部分集合 Γ で $A \subset \bigcup_{x \in \Gamma} [x]$ を満たすものが存在することが, 同値であることを示せ.

(5) P が実数全体の集合で $R = \{(x, y) \in P \times P \mid x \leq y\}$ の場合, P の空でない開集合で P と異なるものは $[x, \infty)$ または (x, ∞) の形の区間であることを示せ.

数学 II-6 球面上の測地多角形について, 次の各問いに答えよ.

(1) 球面全体の 7 分の 1 の面積の領域を囲む測地三角形の内角の和を求めよ.

(2) 内角の和が 480 度であるような測地四角形が囲む領域の面積の, 球面全体の面積に対する比を求めよ.

数学 II-7 M, N を滑らかな多様体とし, $\phi: M \rightarrow N$ を滑らかな写像とする. 次の各問いに答えよ.

(1) ϕ がはめ込みであることの定義を述べよ.

(2) ϕ が埋め込みであることの定義を述べよ.

(3) ϕ が沈め込みであることの定義を述べよ.

以下では $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする.

(4) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $F(x, y) = (x^2, xy, y^2)$ と定める. F の定義域を S^1 に制限して得られる滑らかな写像を $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ と書く. f は, はめ込みであるが, 埋め込みではないことを示せ.

(5) $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を $G(x, y) = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ と定める. G の定義域を S^1 に制限して得られる滑らかな写像を $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$ と書く. g は, 埋め込みであることを示せ.

数学 II-8 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において、原点を中心とする球に内接する立方体を C とする. F と F' は C の向かい合う面であるとする. C のすべての頂点と辺および F と F' の和集合を Y とする. Y 上の同値関係 $\sim$ を

$$y \sim y' \iff y' = y \text{ または } y' = -y$$

により定義し, Y の同値関係 $\sim$ に関する商位相空間を X とする. 次の各問いに答えよ.

- (1) X を図示せよ.
- (2) X の単体分割を与えよ. すなわち, 単体的複体 K で, その多面体 $|K|$ が X と同相であるものを与えよ.
- (3) (2) で与えた単体的複体 K に対し, その整係数ホモロジー群 $H_d(K)$ ($d \geq 0$) を求めよ.

数学 II-9 位相空間 Y から位相空間 X への被覆写像 $p: Y \rightarrow X$ が存在すると仮定する. ただし, Y はコンパクト, X はハウスドルフ空間とする. 次の各問いに答えよ.

- (1) 任意の $x \in X$ に対し, p による x の逆像 $p^{-1}(x)$ は有限集合であることを示せ.
- (2) 各 $x \in X$ に $p^{-1}(x)$ の元の個数を対応づける写像を $\nu: X \rightarrow \mathbb{Z}$ とする. X が連結ならば ν は定値写像であることを示せ.
- (3) $X = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ のとき, 次の3条件をすべて満たす位相空間の組 $\{Y_1, Y_2\}$ の例を挙げよ.
 - (i) Y_1, Y_2 はいずれも連結である.
 - (ii) 各 $i = 1, 2$ に対し, 被覆写像 $p_i: Y_i \rightarrow X$ で $p_i^{-1}(x)$ の元の個数が常に2であるものが存在する.
 - (iii) Y_1 と Y_2 は同相でない.

数学 II-10 $a_n \in \mathbb{C}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を係数とするべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が

- $|z| < 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する.
- $|z| > 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して発散する.

の2条件を満たすとき, このべき級数の収束半径は1であるという. 次の各問いに答えよ.

(1) $a_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ が満たされるとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) 収束半径が 1 のべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で, 次の (i), (ii), (iii) を満たすものの例をそれぞれ挙げよ. ただし, S^1 は単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を表す.

(i) S^1 上のすべての点で発散する.

(ii) S^1 上に発散する点も収束する点もある.

(iii) S^1 上のすべての点で収束する.

数学 II-11 複素関数について, 次の各問いに答えよ. ただし, i は虚数単位とする.

(1) n は正の整数とし, C を 4 点 $z = \pm i, n\pi \pm i$ を頂点とする長方形の周とする. ただし, C には正の向きを付けて考える. 複素積分

$$I = \int_C \frac{\tan z}{z(z+1)} dz$$

を n の式で表せ.

(2) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする. f は D で正則であり, $\operatorname{Re} f(z) > 0$ ($z \in D$) をみたすとする. $z_0 \in D$ を任意にとる.

(i) 任意の $z \in D$ に対して,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) + \overline{f(z_0)}} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|$$

が成り立つことを証明せよ.

(ii) $|f'(z_0)| \leq \frac{2 \operatorname{Re} f(z_0)}{1 - |z_0|^2}$ が成り立つことを証明せよ.

数学 II-12 有界な複素数列全体のなすベクトル空間 ℓ^∞ に $\|a\|_\infty = \sup_n |a_n|$ ($a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$) によってノルムを定める. 次の各問いに答えよ.

(1) 収束する複素数列全体のなす集合を L とする. このとき L は ℓ^∞ の閉部分空間であることを示せ.

(2) $F : L \rightarrow \mathbb{C}$ を $F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ($a = (a_n)_{n=1}^\infty \in L$) で定めると F は連続線型汎関数であることを示せ. ただし, L は $\|\cdot\|_\infty$ によってノルム空間とみるものとする.

- (3) 自然数 n に対し, 第 n 項が 1 で, それ以外は 0 であるような数列を e_n とする. 次の命題 P は正しいか, 理由とともに述べよ.

命題 P 連続線型汎関数 $f: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ について, $f(e_n) = 0$ がすべての自然数 n に対して満たされるならば $f = 0$.

数学 II-13 次の各問いに答えよ. ただし, 関数 $x = x(t)$ に対して $x' = \frac{dx}{dt}(t)$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$ とする.

- (1) 常微分方程式 $x'' + 2x' - (a^2 + 2a)x = e^{at}$ を考える. ただし, a は実数の定数とする.
- (i) 一般解 $x(t)$ を求めよ.
 - (ii) (i) で求めた解 $x(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で収束するための a の範囲を求めよ.
- (2) $x(t)$ を初期値問題 $x' + x^2 + \alpha = 0$, $x(0) = \beta$ の解とし,

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t x(s)ds\right)$$

とおく. ただし, α は実数の定数, β は正の定数とする.

- (i) $y(t)$ が満たす 2 階常微分方程式および $y(0)$, $y'(0)$ を求めよ.
- (ii) $y(t)$ を t , α , β を用いて表せ.
- (iii) $t \in \mathbb{R}$ に対して $X = y(t)$, $Y = y'(t)$ とおく. このとき, 点 (X, Y) が描く曲線を XY 平面上に図示せよ.

数学 II-14 (X, μ) を測度空間とし, $\mu(X) < \infty$ とする. X 上の μ -可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が μ -可測関数 f に概収束しているとする, すなわち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \mu\text{-a.e. } x \in X$$

であるとする. このとき次の各問いに答えよ.

- (1) 集合 E を

$$\{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\}$$

の補集合とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つことを示せ.

数学 II-15 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立に次の確率密度関数 $f(x)$ をもつ分布に従うとする.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases}$$

$X = X_1 + X_2, Y = X_1/(X_1 + X_2)$ とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ.
- (2) (X, Y) の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めよ.
- (3) Y の周辺確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ.
- (4) X, Y が独立かどうかを理由をつけて答えよ.

数学 II-16 確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立にポアソン分布に従う, すなわち, 各 X_i ($i = 1, \dots, n$) の確率関数 $p(x)$ は λ ($\lambda > 0$) を未知母数として次の式で与えられるとする.

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & (x = 0, 1, \dots), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

$\theta = e^{-\lambda}, \bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ とし, θ のモーメント推定量を $\hat{\theta}_M$ とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) $\bar{X}$ の期待値 $E(\bar{X})$ を求めよ.
- (2) $\hat{\theta}_M$ を求めよ.
- (3) $\hat{\theta}_M$ の期待値 $E(\hat{\theta}_M)$ を求めよ.
- (4) $\hat{\theta}_M$ の平均 2 乗誤差 $\text{MSE}(\hat{\theta}_M) = E[(\hat{\theta}_M - \theta)^2]$ を求めよ.
- (5) $\hat{\theta}_M$ は θ の弱一致推定量であるかどうかを判定せよ.