大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2023 年度春入学 一般選抜 第 2 次募集
筆記試験（専門科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

(1) 試験問題は，1 ページ〜4 ページにあります．
(2) 数学 1〜数学 4 の問題の中から2 題を選択して解答して下さい．
(3) 解答用紙は，6 枚配付します．
(4) 解答は，問題ごとに 3 枚の解答用紙を用い，枠内に記入して下さい．解答用紙のすべてに，受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全何枚中の何枚目かを記入して下さい．
(5) 試験時間は，9:30〜12:00 です．
(6) 解答用紙は，白紙を含め，すべて提出して下さい．

試験問題（数学専攻）

次の $\boxed{\text{数学 }1}$ ～ $\boxed{\text{数学 }4}$ の問題の中から2題を選択して解答せよ（3題以上解答しないこと）．選択した問題の番号を解答用紙に書き忘れないように注意せよ．

$\boxed{\text{数学 }1}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．

(i) P のすべての固有値と, それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を1組ずつ求めよ．

(ii) P を直交行列により対角化せよ．

(iii) $Q^2 = P$ を満たし，固有値がすべて正の実数であるような行列 Q を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし，A の転置行列を B とする．写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ と $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3), \qquad g(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4)$$

によって定める．また，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V と W をそれぞれ

$$V = \mathrm{Im}\, f = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}, \quad W = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \mid (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = 0 \right\}$$

とする．ここで，$(\ ,\ )$ は $\mathbb{R}^4$ の標準内積を表す．

(i) 写像 f が単射であるか否かを，理由とともに答えよ．

(ii) W の次元と1組の基底を求めよ．

(iii) $\boldsymbol{0}$ を $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルとする．$\mathrm{Ker}\, g = \left\{ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4 \mid g(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \right\}$ の次元と1組の基底を求めよ．

(iv) $V \cap W$ の次元と1組の基底を求めよ．

$\boxed{\text{数学 2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 累次積分の順序交換を利用して $I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{(1+y^5)^2}\, dy \right) dx$ の値を求めよ．

(2) **(i)** 以下が成り立つような正の実数 δ が存在することを示せ．

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{3}{4}.$$

(ii) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $A_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{A_\varepsilon} \frac{dxdy}{2 - \cos x - \cos y}$$

が収束するか否かを，理由とともに答えよ．

(iii) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $B_\varepsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とおく．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iiint_{B_\varepsilon} \frac{dxdydz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z}$$

が収束するか否かを，理由とともに答えよ．

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は $a_n > 0\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすとする．

(i) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が単調非増加，すなわち，任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $a_n \geq a_{n+1}$ である場合に，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n$ が収束することを示せ．

(ii) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が単調非増加ではない場合に，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n$ が収束しない例を挙げよ．

$\boxed{\text{数学 3}}$ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$，$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ 上のユークリッド距離を d_0，すなわち，任意の $p = (x, y)$, $q = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d_0(p, q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

とする．また，距離 $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，$p = (x, y)$, $q = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して

- x, x' がともに有理数であるか x, x' がともに無理数である場合には

$$d_1(p, q) = |x - x'| + |y - y'|.$$

- 上記以外の場合には

$$d_1(p, q) = |x - x'| + |y| + |y'|.$$

とすることで定義する．次の各問いに答えよ．

(1) 各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{R}^2$ の点列 $\{a_n(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n(\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{n}, 1 + \frac{\sin\theta}{n}\right)$$

により定義する．また，$a = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ とする．点列 $\{a_n(\pi/3)\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{a_n(\pi/4)\}_{n=1}^{\infty}$ それぞれに対し，それが距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ において点 a に収束するか否かを，理由とともに答えよ．

(2) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ が完備であるか否かを，理由とともに答えよ．

(3) A は $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の有界閉集合であることを示せ．

(4) A が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の部分距離空間としてコンパクトであるか否かを，理由とともに答えよ．

(5) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 B と全単射 $f : A \to B$ の組で，任意の $p, q \in A$ に対して

$$d_0\big(f(p), f(q)\big) = d_1(p, q)$$

を満たすものは存在しないことを示せ．

$\boxed{\text{数学 4}}$ $\theta \in \mathbb{R}$ とする．X_1, X_2, X_3 を開区間 $(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$ 上の一様分布に独立同一に従う確率変数列とする．すなわち，X_1, X_2, X_3 は確率的に独立であり，各確率変数は確率密度関数

$$p(x|\,\theta) = \begin{cases} 1 & \left(\theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2}\right), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする．確率変数 $G, K, T, \overline{X}$ を

$$\begin{aligned} G &:= \max\{X_1, X_2, X_3\} \qquad \big(X_1, X_2, X_3 \text{ の中の最大のもの}\big), \\ K &:= \min\{X_1, X_2, X_3\} \qquad \big(X_1, X_2, X_3 \text{ の中の最小のもの}\big), \\ T &:= \frac{1}{2}(G + K), \\ \overline{X} &:= \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \end{aligned}$$

と定める． 次の各問いに答えよ．

(1) X_1 の期待値 $\mathrm{E}[X_1]$ と分散 $\mathrm{V}[X_1] := \mathrm{E}\big[\big(X_1 - \mathrm{E}[X_1]\big)^2\big]$ を求めよ．

(2) $\overline{X}$ の期待値 $\mathrm{E}[\overline{X}]$ と分散 $\mathrm{V}[\overline{X}]$ を求めよ．

(3) G と K の確率密度関数をそれぞれ求めよ．

(4) $\mathrm{E}[T]$ を求めよ．

(5) $\mathrm{V}[G]$ と $\mathrm{V}[K]$ をそれぞれ求めよ．

(6) $\mathrm{E}\big[(G - \theta)(K - \theta)\big]$ を求めよ．

(7) G と K の共分散 $\mathrm{COV}[G, K] := \mathrm{E}\big[\big(G - \mathrm{E}[G]\big)\big(K - \mathrm{E}[K]\big)\big]$ を求めよ．

(8) $\mathrm{V}[T]$ を求めよ．