大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2024年度春入学 一般選抜
筆記試験（専門基礎科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

(1) 数学専攻の専門基礎分野の問題は，1ページ 〜 4ページにあります.

(2) 4題すべてに解答して下さい.

(3) 解答用紙は，8枚配付します.

(4) 解答は，問題ごとに2枚の解答用紙を用い，枠内に記入して下さい．すべての解答用紙に受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全2枚中の何枚目かを記入して下さい.

(5) 試験時間は，9:30 〜 12:00です.

(6) 解答用紙は，白紙を含め，すべて提出して下さい.

専門基礎分野の問題（数学専攻）

次の数学 I–1 〜 数学 I–4 の問題 4 題すべてに解答せよ．解答用紙に問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

$\boxed{\text{数学 I–1}}$ 次の $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を考える．次の各問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合で書け．

(2) $\boldsymbol{a}_5$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ の 1 次結合で書け．

(3) 4×5 行列を $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5)$ で定める．このとき，A の階数を求めよ．

(4) V を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．このとき，V の 1 組の基底を求めよ．

(5) $\mathbb{R}^5$ の部分空間

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

の 1 組の基底を求めよ．

$\boxed{\text{数学 I–2}}$ 次の対称行列 A について，次の各問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた A の各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) A を直交行列によって対角化せよ．

(4) α を A の固有値に一致しない実数とする．ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ が連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の解であるとき，次式を証明せよ:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{9}{(\alpha+1)^2} + \frac{4}{(\alpha-2)^2} + \frac{1}{(\alpha-5)^2}.$$

$\boxed{\text{数学 I–3}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 関数 $x\cos x,\ \log(1+2x)$ それぞれについて, $x=0$ のまわりでの漸近展開を

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+o(x^5) \qquad (x\to 0)$$

の形で求めよ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+2x)}-\frac{1}{2x\cos x}\right)$ を求めよ.

(3) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有限な極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ をもつとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

となることを示せ.

$\boxed{\text{数学 I–4}}$ 関数 $f(r)$ は区間 $[0,\infty)$ で定義された単調増加な連続関数で，$f(0) \geqq 0$ であるとする． $a>0$ を定数とし，3 次元空間内の立体 V を

$$V = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2=r^2,\ 0 \leqq z \leqq f(r),\ 0 \leqq r \leqq a\}$$

と定める．次の各問いに答えよ．

(1) 独立変数 $x,\ y$ に対してのみ極座標 ((x,y,z) に対して円柱座標）を導入することにより，

$$I(a) := \iiint_V dxdydz = 2\pi \int_0^a f(r)r\,dr$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(r)=\sinh r$ であるとき， $I(a)$ を求めよ.

(3) $f(r)=r^2\arctan r$ とする．極限

$$\lim_{a\to\infty} \frac{I(a)}{(f(a))^2}$$

の値を求めよ．なお，逆正接関数 arctan の値域は $(-\pi/2,\pi/2)$ であるとする．