大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2024年度春入学 一般選抜
筆記試験（専門科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

(1) 数学専攻の専門分野の問題は，1ページ ～ 9ページにあります.
(2) 数学 II–1 ～ 数学 II–16 の問題の中から3題を選択して解答して下さい.
(3) 解答用紙は，6枚配付します.
(4) 解答は，問題ごとに2枚の解答用紙を用い，枠内に記入して下さい．すべての解答用紙に，受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全 2 枚中の何枚目かを記入して下さい.
(5) 試験時間は，13:00 ～ 15:30です.
(6) 解答用紙は，白紙を含め，すべて提出して下さい.

専門分野の問題（数学専攻）

次の数学 II–1 〜 数学 II–16 の問題の中から3題を選択して解答せよ（4題以上解答しないこと）．解答用紙に選択した問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

数学 II–1　複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $M_2(\mathbb{C})$ で表す．a, b を複素数とし，行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

で定め，$\mathbb{C}$ 線形写像 $F\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ を $F(B) = XB$ $(B \in M_2(\mathbb{C}))$ で定める．$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \in M_2(\mathbb{C})$ を行列単位とする．すなわち，E_{ij} は (i, j) 成分が 1 で，それ以外の成分は 0 である．次の各問いに答えよ．

(1) $M_2(\mathbb{C})$ の基底 $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ に関する F の表現行列 A を求めよ．

(2) F の固有値をすべて求めよ．また，それぞれの固有値に対して，その固有値に対する F の固有空間の 1 組の基底を求めよ．

(3) A が対角化可能であるための a, b に関する必要十分条件を与えよ．

(4) A が対角化可能ではないとき，$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるような 4 次正則行列 P を1つ求めよ．

数学 II–2　G を群とする．次の各問いに答えよ．

(1) G の位数が素数 p のとき，G は巡回群であることを示せ．

(2) G の正規部分群 H と G の部分群 K に対して，G の部分集合 KH を

$$KH = \{kh \mid k \in K,\ h \in H\}$$

と定める．

(i) KH は G の部分群であることを示せ．

(ii) 剰余群 $K/(K \cap H)$ と KH/H は同型であることを示せ．

(3) 写像 $f : G \to G$ を，任意の $g \in G$ に対して $f(g) = g^2$ と定める．

(i) f が群準同型写像であるための必要十分条件は G が可換群であることを示せ．

(ii) f が全射である可換群 G で元を 2 個以上持つ例を 1 つ挙げよ．

(iii) $\phi : G \to \mathbb{Z}$ を群準同型写像とする．f が全射のとき，任意の $g \in G$ に対して $\phi(g) = 0$ が成り立つことを示せ．

数学 II–3 写像 $\psi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[t]$ を $\psi(f(x,y)) = f(t^2, t^3)$ で定義する．次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\,\psi = g(x,y)\mathbb{C}[x,y]$ となる $g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ を 1 つ求めよ．

(2) (1) で求めた $g(x,y)$ は $\mathbb{C}[x,y]$ の素元であることを示せ．

(3) ψ の像 $\mathrm{Im}\,\psi$ において t^2, t^3 は共に既約元であることを示せ．

(4) 剰余環 $\mathbb{C}[x,y]/\,\mathrm{Ker}\,\psi$ は，1 変数多項式環 $\mathbb{C}[z]$ と環同型とはなり得ないことを示せ．

数学 II–4

$$\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/3}, \qquad \alpha_1 = \sqrt[3]{2}, \qquad \alpha_2 = \omega\sqrt[3]{2}, \qquad \alpha_3 = \omega^2\sqrt[3]{2},$$
$$f = X^3 - 2 = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$$

とし，有理数体 $\mathbb{Q}$ に α_1, α_2 を添加した体 $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ を L とする．次の各問いに答えよ．

(1) f は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ．

(2) 拡大 $L/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示せ．

(3) 拡大 $L/\mathbb{Q}$ の拡大次数を求めよ．

(4) ガロア群 $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を，f の根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に置換により作用させることで，3 次対称群 S_3 の部分群とみなすとき，その部分群は S_3 自身であることを示せ．

(5) (4) の $S_3 = G$ の部分群である 3 次交代群 A_3 に関する L の不変部分体は $\mathbb{Q}(\omega)$ であることを示せ．

数学 II–5 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$x \in X$ に対して，x の開近傍全体の集合を $\mathcal{N}_x$ で表し，$[x] = \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U$ とおく．また，X の部分集合 A に対し，A の閉包を $\overline{A}$ で表す．次の各問いに答えよ．

(1) $x, y \in X$ に対し，$y \in [x]$ であるためには $x \in \overline{\{y\}}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ．

(2) X の位相 $\mathcal{O}$ に関する次の条件 (i) を考える．

(i) $(O_i)_{i \in I}$ が X の開集合族ならば $\bigcap_{i \in I} O_i$ は X の開集合である．

$\mathcal{O}$ が条件 (i) を満たし，かつ X の部分集合 O が条件「$x \in O$ ならば $[x] \subset O$」を満たすとき，O は X の開集合であることを示せ．

(3) $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O}')$ を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続写像ならば，f は次の条件 (ii) を満たすことを示せ．

(ii) $x, y \in X$ に対し，$x \in \overline{\{y\}}$ ならば $f(x) \in \overline{\{f(y)\}}$ である．

また，X の位相 $\mathcal{O}$ が条件 (i) を満たすとき，条件 (ii) を満たす写像 $f : X \to Y$ は連続写像であることを示せ．

(4) 一般に位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件を満たすとき，$(X, \mathcal{O})$ は既約であるという．

$X = A \cup B$ を満たす閉集合 A, B があれば $X = A$ または $X = B$ である．

「任意の $x, y \in X$ に対して $x \in \overline{\{z\}}$ かつ $y \in \overline{\{z\}}$ を満たす $z \in X$ が存在すれば，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は既約である．」という命題を証明せよ．また，X の位相 $\mathcal{O}$ が条件 (i) を満たすとき，この命題の逆が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{数学 II–6}}$ 単位球面を互いに面積の等しい 6 個の凸な球面三角形と，互いに面積の等しい 7 個の凸な球面四角形に切り分ける．ただし，球面四角形の面積は球面三角形の面積のちょうど 2 倍であるとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 各球面三角形の内角の和を求めよ．

(2) どの球面三角形や球面四角形の辺上にも他の球面三角形や球面四角形の頂点が無く，隣接する球面三角形や球面四角形が辺を共有するように単位球面を切り分けるとき，頂点の個数を求めよ．ただし，異なる球面三角形や球面四角形が共有する頂点は，重複して数えないこととする．

$\boxed{\text{数学 II–7}}$ (x, y) を $\mathbb{R}^2$ の標準座標系とし，$M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ かつ } y = 0\}$ と定める．$N := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ とおく．$(u, v) \in N$ に対して，写像 $\varphi : N \to M$ を

$$\varphi(u, v) := (\cosh u \cos v, \sinh u \sin v)$$

と定める．次の各問いに答えよ．φ が微分同相写像となることは，証明なしで用いてよい．

(1) 点 $p=(u,v)\in N$ における φ の微分

$$(d\varphi)_p : T_pN \to T_{\varphi(p)}M$$

の，T_pN の標準座標基底

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p\right\}$$

と $T_{\varphi(p)}M$ の標準座標基底

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}\right\}$$

に関する局所表示を求めよ．

(2) $\omega := dx\wedge dy$ を M 上の 2 次微分形式とする．N の部分集合 Ω を

$$\Omega := \{(u,v)\in N \mid (u,v)\in(0,1)\times(-\pi/2,\pi/2)\}$$

とおくとき，積分

$$\int_\Omega \varphi^*\omega$$

の値を求めよ．

(3) $a>0$ を定数とし，$p_0 := (\cosh a, 0)\in M$ と定める．M 上のベクトル場

$$\varphi_*\frac{\partial}{\partial v}$$

の p_0 を通る極大積分曲線が M 上に描く図形は，楕円

$$\frac{x^2}{\cosh^2 a}+\frac{y^2}{\sinh^2 a}=1$$

から点 $(-\cosh a, 0)$ を除いたものであることを示せ．

数学 II–8 単体的複体に関する次の各問いに答えよ．

(1) オイラー標数が 2 以上の 1 次元単体的複体は連結でないことを示せ．

(2) 連結な 2 次元単体的複体でオイラー標数が 3 に等しいものの例を示せ．

(3) K をオイラー標数が 1 の連結な 2 次元単体的複体とする．K の 1 次元輪体群 $Z_1(K)$ が 4 個の元 z_1, z_2, z_3, z_4 により生成される自由アーベル群であり，1 次元境界輪体群 $B_1(K)$ が 4 個の元

$$b_1 = 2z_1 - z_2, \qquad b_2 = 9z_1 - 4z_2 + z_4$$
$$b_3 = 7z_1 - 2z_3 + 6z_4, \qquad b_4 = 3z_1 + 2z_2 - 2z_3 + 6z_4$$

により生成されるとする．K の整係数ホモロジー群 $H_p(K)$ を各整数 $p \geq 0$ に対して求めよ．

$\boxed{\text{数学 II–9}}$ 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 U_1, U_2 をそれぞれ

$$U_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < 2\} \setminus \{(0,0)\},$$
$$U_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\} \setminus \{(2,0)\}$$

によって定める．次の各問いに答えよ．

(1) U_1 は円周 $S^1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$ とホモトピー同値であることを示せ．

(2) $U_1 \cap U_2$ は可縮であることを示せ．

(3) $U_1 \cup U_2$ は弧状連結であることを示せ．

(4) $U_1 \cup U_2$ の任意の点 p を基点とする基本群 $\pi_1(U_1 \cup U_2, p)$ は階数 2 の自由群と同型であることを示せ．円周 S^1 の基本群は無限巡回群と同型であることは認めてよい．

$\boxed{\text{数学 II–10}}$ n は自然数，$\alpha \in (0,1)$ は定数とし，関数 f_n, g は閉区間 $[0,1]$ で定義された実数値連続関数とする．また，$x \in [0,1]$ に対して，$I_n(x) = \{y \in [0,1] \mid |y - x| \leq 1/n\}$, $J_n(x) = [0,1] \setminus I_n(x)$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ となる関数 f が存在すれば，f は閉区間 $[0,1]$ で連続であることを示せ．

(2) 関数 g_n を

$$g_n(x) = \int_{I_n(x)} g(y)|x-y|^{-\alpha}\, dy, \quad x \in [0,1]$$

で定める．このとき，任意の $x \in [0,1]$ に対して $g_n(x)$ は有限値であることを示した上で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ を求めよ．

(3) 関数 h_n, h をそれぞれ

$$h_n(x) = \int_{J_n(x)} g(y)|x-y|^{-\alpha}\,dy, \quad h(x) = \int_0^1 g(y)|x-y|^{-\alpha}\,dy, \quad x \in [0,1]$$

で定める．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |h_n(x) - h(x)|$ の値を求めよ．

(4) (3) で定めた関数 h は閉区間 $[0,1]$ で連続であることを示せ．

$\boxed{\text{数学 II–11}}$ 次の各問いに答えよ．ただし i は虚数単位とする．

(1) 実数 $R > 1$ に対し，複素数 M_R を複素積分

$$M_R = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^4+1}\,dz$$

により定める．ただし $C_R = \{Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$ とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} M_R$ を求めよ．

(2) 積分値

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}\,dx$$

を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II–12}}$ X と Y をそれぞれノルム $\|\cdot\|_X$ と $\|\cdot\|_Y$ を備えたバナッハ空間とし，T を X から Y への閉作用素で，その定義域を $D(T)$ とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $N = \{x \in D(T) \mid Tx = 0\}$ は X の閉部分空間であることを示せ．

(2) (1) の N に対してベクトル空間としての商空間 $Z = X/N$ を定める．さらに Z の元 $[x] = x + N = \{x + w \mid w \in N\}$ に対して実数 $\|[x]\|_Z$ を

$$\|[x]\|_Z = \inf_{w\in N} \|x - w\|_X$$

で定める．このとき Z は $\|\cdot\|_Z$ の下でノルム空間になることを示せ．

(3) (2) で定義された Z に対して，Z から Y への作用素 S を

$$S[x] = Tx, \quad [x] \in D(S) = \{[x] \in Z \mid x \in D(T)\}$$

により定める．このとき S は閉作用素であることを示せ．

$\boxed{\text{数学 II–13}}$ 連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + y(t), \quad \frac{dy}{dt}(t) = bx(t) + c(t)y(t) \tag{E}$$

を考える．ただし a, b は実定数，$c(t)$ は t の関数とする．次の各問いに答えよ．

(1) $a = 1, b = 0, c(t) = \dfrac{2}{t+1}$ のとき，$x(0) = y(0) = 1$ を満たす (E) の解を求めよ．

以下，$c(t)$ として定数 c を考えることにする．

(2) $a = 0, b = 3, c = -2$ のとき，(E) の一般解を求めよ．また，$x(0) = p, y(0) = q$ を満たす (E) の解が $t \to \infty$ で原点 $(0, 0)$ に収束するための実数 p, q の条件を求めよ．

(3) $b = 3, c = -2$ のとき，(E) のすべての解が $t \to \infty$ で原点 $(0, 0)$ に収束するための a の条件を求めよ．

(4) $b = -1, c = a$ とする．関数 $V(x, y)$ を $V(x, y) = x^2 + y^2$ とおき，(E) の解を $(x(t), y(t))$ とする．このとき

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t))$$

を $V(x(t), y(t))$ を用いて表せ．また，方程式 (E) のすべての解が $t \to \infty$ で原点 $(0, 0)$ に収束するための a の条件を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II–14}}$ (X, μ) を測度空間とし，I を $\mathbb{R}$ の開区間とする．$X \times I$ 上の関数 $f : X \times I \ni (x, s) \mapsto f(x, s) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は次を満たすとする．

(i) 各 $s \in I$ に対して $f(x, s)$ は $x \in X$ の関数として測度 μ に関して可積分.

(ii) 各 $x \in X$ に対して $f(x, s)$ は $s \in I$ の関数として偏微分可能.

(iii) 測度 μ に関して可積分な X 上の関数 ϕ で，すべての $(x, s) \in X \times I$ について

$$\left| \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) \right| \le \phi(x)$$

を満たすものが存在する．

このとき次の各問いに答えよ．

(1) 区間 I 上の関数 J を

$$J(s) = \int_X f(x, s)\, d\mu(x) \quad (s \in I)$$

とおくと J は I 上で微分可能で

$$\frac{dJ}{ds}(s) = \int_X \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)\, d\mu(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 以下, $\displaystyle\int_0^\infty (\cdots)\, dx$ は 1 次元ルベーグ測度に関する積分を表すとする．$s > 0$ に対して

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

とおくとき，$\Gamma(s)$ は $s > 0$ で微分可能で

$$\frac{d\Gamma}{ds}(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \log x\, dx$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{数学 II–15}}$ 次で与えられる確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ を考える.

- $\Omega = \mathbb{R}$.
- $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ 上のボレル集合族.
- 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathbb{P}(A) = \displaystyle\int_A \mathsf{p}(x)\, dx$.

ただし $\mathsf{p}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\ (x \in \mathbb{R})$. Ω 上の実数値確率変数 X と Y_c をそれぞれ

$$X(\omega) = \omega; \qquad Y_c(\omega) = \begin{cases} \omega & (|\omega| \geq c) \\ -\omega & (|\omega| < c) \end{cases} ; \quad (\omega \in \Omega)$$

で定める．ただし $c \geq 0$ は定数である．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) 確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ を $\mathsf{p}(x)$ を用いて積分で表せ.

(2) 期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\mathbb{V}[X]$ を求めよ．ただし $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ を証明なしで用いてよい.

(3) $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \mathsf{p}(z)\, dz\ (x \in \mathbb{R})$ とおく．任意の $x \geq 0$ に対して， $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ を示せ.

(4) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{P}(Y_c \leq y)$ を (3) の Φ を用いて表せ.

(5) 半開区間 $[0, \infty)$ 上の実数値関数 f を $f(c) = \mathbb{E}[XY_c] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y_c]$ で定める．このとき，関数 f は $[0, \infty)$ 上で連続であることを示せ．さらに $f(0)$ と $\lim_{c \to +\infty} f(c)$ の値を求めよ．

(6) ある $c_0 \in (0, \infty)$ が存在して，$f(c_0) = 0$ となることを示せ．

(7) $c > 0$ とする．閉区間 $A = [-1, 1]$ に対して

$$\mathbb{P}\big(X \in A \,\text{かつ}\, Y_c \in A\big) \neq \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y_c \in A)$$

を示せ．

$\boxed{\text{数学 II–16}}$ n は正の整数とし，2 次元実確率変数 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ は互いに独立で同一の確率分布に従うとする．$p = \mathbb{P}(Y_i > X_i)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ とし，確率変数 $D_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ と T を

$$D_i = \begin{cases} 1 & (Y_i > X_i) \\ 0 & (Y_i \leq X_i) \end{cases}; \qquad T = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$$

と定める．ただし $\mathbb{P}$ は確率とする．検定問題

$$\text{帰無仮説}\, H_0 : p = \frac{1}{2}, \qquad \text{対立仮説}\, H_1 : p > \frac{1}{2}$$

を考える．この検定問題に対して，統計量 T に基づく検定方式を用いることにする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 確率変数 T が従う分布の確率関数を求めよ．

(2) $n = 8$ とする．統計量 T に基づく非確率化検定を考える．したがって，検定方式は T の棄却域で定まることになる．検定のサイズが 0.05 以下である T の棄却域で最大（包含関係で最大）となるものを求めよ．さらにそのときの検定のサイズを求めよ．

(3) n は 8 以上の固定された正の整数とする．T の棄却域を 2 点集合 $\{n-1, n\}$ としたときの検出力関数 $\beta_n(\widetilde{p})\,(\widetilde{p} > 1/2)$ の下限を n を用いて表せ．

(4) p の信頼区間を

$$\left[\frac{T}{n} - 1.96\sqrt{\frac{T(n-T)}{n^3}}, \, \frac{T}{n} + 1.96\sqrt{\frac{T(n-T)}{n^3}}\right]$$

ととる．この信頼区間の幅の最大値が 0.1 以下となる偶数 n の最小値を求めよ．