大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2024年度春入学 一般選抜 第2次募集
筆記試験（専門科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

1. 数学専攻の専門科目の問題は，1 ページ ～ 4 ページにあります．
2. 数学 1～数学 4 の問題の中から2 題を選択して解答して下さい．3 題以上を選択しないで下さい．
3. 解答用紙は，6 枚配付します．計算用紙は，4 枚配付します．
4. 解答は，問題ごとに 3 枚の解答用紙を用い，解答欄の枠内に記入して下さい．すべての解答用紙に受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全 3 枚中の何枚目かを記入して下さい．
5. 試験時間は，9:30 ～ 12:00 です．
6. 解答用紙は，解答欄が白紙のものを含め，すべて提出して下さい．計算用紙は，提出せずにすべて持ち帰って下さい．

専門科目の問題（数学専攻）

次の $\boxed{\text{数学 1}}$ ～ $\boxed{\text{数学 4}}$ の問題の中から 2 題を選択して解答せよ．3 題以上を選択してはならない．解答用紙に問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

$\boxed{\text{数学 1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し, 3 次正方行列 A を $A = \lambda E_3 + \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ で定める．ただし，E_3 は 3 次単位行列で，${}^t\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ の転置行列を表す．また，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ はいずれも零ベクトルではないとする．

(i) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，${}^tPAP$ が対角行列となる P を一つ求め，それに対する ${}^tPAP$ を与えよ．

(ii) A の固有値を $\lambda, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ．

(iii) A の各固有値に対する固有空間を求め，A が対角化不可能であるためには $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交することが必要十分であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ第 1 列，第 2 列，第 3 列とする 3 次正方行列の行列式を $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ で表す．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して実数値関数 $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})$ で定める．

(i) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ が，すべての $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ を満たすならば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ であることを示せ．ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は $\mathbb{R}^3$ における $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の標準的な内積である．

(ii) すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に限ることを示せ．

(iii) A を実数を成分とする 3 次正則行列とし，$\widetilde{A}$ を A の余因子行列とする．すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f_{A\boldsymbol{a},A\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = ({}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \boldsymbol{x})$ が成り立つことを示すことによって $A\boldsymbol{a} \times A\boldsymbol{b} = {}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{数学 2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{(x-2y)^2}{(x+2y)^4+1}\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\,:\,0 \le y \le \frac{1}{2},\ 0 \le x \le 1-2y\right\}.$$

(2) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ についての C^2 級関数 f と $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ との合成関数を

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とする．

(i) 次の関数を，$g(r,\theta)$ の偏導関数および r, θ を用いて表せ．

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}\Bigg|_{(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)}.$$

(ii) 次の等式を示せ．

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

(3) 区間 $[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ とその極限関数 f について考える．

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で f に一様収束するならば，f は $[0,1]$ 上で連続であることを示せ．

(ii) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で f に一様収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 区間 $[0,1]$ 上の各点 x において $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であるが $(*)$ は成立しないような連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ および f の例を挙げよ．

$\boxed{\text{数学 3}}$ X はコンパクトでない位相空間, $\mathcal{O}$ は X の位相とする．X に属さない元 ∞ を用いて集合 X^* を $X^* = X \cup \{\infty\}$ によって定義する．また, 集合 X^* の位相 $\mathcal{O}^*$ を

$$\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \cup \{X^* \setminus K \mid K \text{ は } X \text{ のコンパクト閉集合}\}$$

によって定義する．次の各問いに答えよ．

(1) X^* の任意の点 x^* に対して $\{x^*\}$ が X^* の閉集合ならば, X の任意の点 x に対して $\{x\}$ は X の閉集合であることを示せ.

(2) X の任意の点 x に対して $\{x\}$ が X の閉集合ならば, X^* の任意の点 x^* に対して $\{x^*\}$ は X^* の閉集合であることを示せ.

(3) X が連結ならば X^* は連結であることを示せ.

(4) X^* はコンパクトであることを示せ.

位相空間 Y について, Y の任意の点 y に対して y のコンパクト近傍が存在するとき, Y は局所コンパクトであるという.

(5) X が局所コンパクトなハウスドルフ空間であるならば X^* もハウスドルフ空間であることを示せ.

(6) X^* がハウスドルフ空間ならば X は局所コンパクトであることを示せ.

$\boxed{\text{数学 4}}$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間とする．X をこの空間上で定義された確率変数とし，その確率分布を

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} (1-p)p^{x-1} & (x \in \mathbb{N}), \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases} \tag{a}$$

と定める．ただし，$\{X = x\} := \{\omega \in \Omega;\, X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$ で定義し，$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$，$p$ は $0 < p < 1$ なる実数である．(a) で与えられる確率分布を幾何分布とよび，$G(p)$ であらわす．さらに，Y も同じ確率空間上で定義された確率変数で，X とは独立に幾何分布 $G(p)$ に従うものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) x を自然数とするとき, 確率 $\mathrm{P}(X > x)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値を求めよ．

(3) 確率変数 X の分散を求めよ．

(4) 確率変数 X は

$$\mathrm{P}(X > x + y \,|\, X > x) = \mathrm{P}(X > y) \qquad (\forall x, y \in \mathbb{N}),$$

$\mathrm{P}(X = x) > 0\,(\forall x \in \mathbb{N})$, $\mathrm{P}(X \in \mathbb{N}) = 1$ をみたすことを示せ．ここで，$A, B \in \mathcal{F}$ で $\mathrm{P}(B) > 0$ なるものに対して

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

と定める．

(5) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上で定義された確率変数 W は

$$\mathrm{P}(W > x + y \,|\, W > x) = \mathrm{P}(W > y) \qquad (\forall x, y \in \mathbb{N}),$$

$\mathrm{P}(W = w) > 0\,(\forall w \in \mathbb{N})$, $\mathrm{P}(W \in \mathbb{N}) = 1$ をみたすとする．このとき，確率変数 W は，ある $p\,(0 < p < 1)$ に対する幾何分布 $G(p)$ に従うことを示せ．

(6) z を自然数とするとき, 確率 $\mathrm{P}(X + Y = z)$ を求めよ．